

拓扑空间

拓扑无需保距，研究形状的连续变形性质. 首先定义拓扑空间.

定义 1 (拓扑空间). 设 X 是一非空集合，集类 $\mathcal{T} \subset 2^X$ ，满足以下条件：

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;
2. 对任意并封闭： $\forall U_a \in \mathcal{T}, a \in I$ ，则 $\bigcup_{a \in I} U_a \in \mathcal{T}$;
3. 对有限交封闭： $\bigcap_{a=1}^n U_a \in \mathcal{T}$.

则称 $(X, \mathcal{T})$ 为一个**拓扑空间**， $\mathcal{T}$ 为集合 X 上的**拓扑**. $\mathcal{T}$ 中的元素 U_a 称为**开集**.

定义 2. 2^X 是 X 上最大的拓扑，称为**离散拓扑**.

定义 3. $\{\emptyset, X\}$ 是 X 上最小的拓扑，称为**平凡拓扑**.

有了开集的定义，自然地定义它的补集为闭集.

定义 4 (闭集). 对 X 的子集 A ，若 $X \setminus A$ 为开集，则称 A 为**闭集**.

定义 5 (邻域). 设 $x \in X$ ，如果集合 $N \subset X$ 满足：存在开集 U ，使得 $x \in U \subset N$ ，则称 N 为 x 的**邻域**，称 $N \setminus \{x\}$ 为 x 的**去心邻域**.

定义 6 (内核). A 中包含的所有开集的并称为 A 的**内核**，记作 $\mathring{A}$.

定理 1. A 是开集当且仅当 $A = \mathring{A}$.

证明. 设 A 是开集， $\forall x \in A$ ， $\exists U_x \in \mathcal{T}$ ，使得 $x \in U_x \subset A$ ，于是 $A \subset \mathring{A}$ ； $\mathring{A} = \bigcup_{a \in I} U_a$ ， $U_a \in \mathcal{T}$ ，因此 $\mathring{A} \subset A$. 故 $A = \mathring{A}$.

反之，设 $A = \mathring{A} = \bigcup_{a \in I} U_a$ ，由拓扑空间定义，开集的任意并仍为开集，即 A 为开集. $\square$

定义 7 (极限点). 设 $x \in X$ ， $A \subset X$. 若 x 的任一去心邻域中均有至少一点属于 A ，即包含 x 的任一开集 U 中，有

$$(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset,$$

则称 x 为 A 的**极限点**，又称**聚点**.

定理 2. A 是闭集当且仅当 A 包含了它的全部极限点.

证明. 设 A 是闭集, 则 $X \setminus A$ 是开集, 由于开集是它的任意元素的邻域, 于是 $X \setminus A$ 的任一点都不是 A 的极限点, 于是 A 包含了它的全部极限点.

反之, 设 A 包含了它的全部极限点, 则对任意 $x \in X \setminus A$, 总存在 x 的邻域 N 使得 $N \cap A = \emptyset$, 于是 $N \subset X \setminus A$, 故 $X \setminus A$ 是它的任意元素的邻域, 故 $X \setminus A$ 为开集, A 为闭集. $\square$

定义 8 (导集). A 的极限点的集合称为 A 的**导集**, 记作 A' .

定义 9 (闭包). A 中的元素和它的极限点组成的集合, 即 A 本身和 A 的导集的并集, 称为 A 的**闭包**, 记作 $\overline{A}$.

由定义立即有 $\overline{A} = A \cup A'$.

定理 3. A 的闭包是包含 A 的最小闭集.

证明. 对 $\forall x \in X \setminus \overline{A}$, 存在 x 的开邻域 U 不包含 A 的极限点, 于是 $x \in U \subset X \setminus \overline{A}$, 于是 $X \setminus \overline{A}$ 是开集, 故 $\overline{A}$ 是闭集.

对任意闭集 $B \supset A$, 由定理 2, B 包含 A 的全部极限点以及 B 的极限点, 于是 $\overline{A} \subset B$. 故 A 的闭包是包含 A 的最小闭集. $\square$

注. 该定理也就是说, A 的闭包是包含 A 的全体闭集之交.

推论 1. A 是闭集当且仅当 $A = \overline{A}$.

定义 10 (稠密性). 设 X 为拓扑空间, $A \subset X$, 若 $\overline{A} = X$, 即对任意 $x \in U \subset X, U \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset$, 则称 A 是**稠密的**.

定义 11 (边界). A 的闭包与 $X \setminus A$ 的交称为 A 的**边界**, 记作 ∂A .

用数学语言描述, 即 $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

定义 12 (拓扑子空间). 设 $(X, \mathcal{T})$ 为拓扑空间, $Y \subset X$, 定义 Y 上的子空间拓扑:

$$\mathcal{T}_Y = \{O \cap Y \mid O \in \mathcal{T}\}.$$

称 $(Y, \mathcal{T}_Y)$ 为 X 的**拓扑子空间**.

定义 13 (有限补拓扑). 设集合 $X = \mathbb{R}$, 赋予**有限补拓扑**, 对任意开集 $U \subset \mathbb{R}$, $X \setminus U$ 是有限的或者为整个空间 X .

对任一有限集 $A \subset X$, X 中的任意元素 x 都是 A 的极限点. 反之, 在这一拓扑下, 有限集没有极限点.

定义 14 (拓扑基). 设拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$, 若一族开集 β 通过任意的一些并可以得到 X 中的任一开集, 则称 β 为**拓扑基**, β 中的元素称为**基础开集**, 也称 $\mathcal{T}$ 为 β **生成的拓扑**.

等价地, 我们可以说对任意 $x \in X$ 及其邻域为 N , 都存在开集 $O \subset \beta$, 使得 $x \in O \subset N$.

定理 4. 设 β 是 X 的一个非空子集族, 若 β 中元素的有限交仍在 β 中, $\bigcup \beta \in \beta$, 则 β 给出 X 上的拓扑, 且为其拓扑基.

证明. 设 $U, V \in \beta$, 令

$$\mathcal{T} = \left\{ U = \bigcup_{V \in \beta'} V \mid \beta' \subset \beta \right\},$$

下面证明 $\mathcal{T}$ 是 X 上的拓扑.

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$. 令 $\beta' = \emptyset$, 有 $\emptyset = \bigcup_{V \in \beta'} V \in \mathcal{T}$. 令 $\beta' = X$, 有 $X = \bigcup_{V \in \beta'} V \in \mathcal{T}$.

2. 设 $U_a \in \mathcal{T}$, $a \in I$. 设 $U_a = \bigcup_{V \in \beta_a} V$, 其中 $\beta_a \subset \beta$. 则

$$\bigcup_{a \in I} U_a = \bigcup_{a \in I} \left(\bigcup_{V \in \beta_a} V \right) = \bigcup_{V \in \beta_a, a \in I} V = \bigcup_{V \in \bigcup_{a \in I} \beta_a} V \in \mathcal{T}.$$

3. 设 $U_1 = \bigcup_{V \in \beta_1} V$, $U_2 = \bigcup_{V \in \beta_2} V$, 这里 $\beta_1, \beta_2 \in \beta$. 有

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{V_1 \in \beta_1, V_2 \in \beta_2} V_1 \cap V_2.$$

对任意 $x \in V_1 \cap V_2$, 存在 $W_x \in \beta$, 使得 $x \in W_x \subset V_1 \cap V_2$. 于是有

$$V_1 \cap V_2 \subset \bigcup_{x \in V_1 \cap V_2} W_x \subset V_1 \cap V_2,$$

于是

$$V_1 \cap V_2 = \bigcup_{x \in V_1 \cap V_2} W_x \in \mathcal{T}.$$

所以 $\mathcal{T}$ 是 X 上的拓扑, 并且由 $\mathcal{T}$ 的构造, β 是 $\mathcal{T}$ 的拓扑基. □