

Tietze 扩张定理

定义 1 (度量空间). 设定义在集合 $X \times X$ 上的一个实值函数 d , 对任意 $x, y, z \in X$, 满足

1. $d(x, y) \geq 0 \iff x = y$ 取等;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$,

则称 d 为 X 上的一个**度量**, (X, d) 为一个**度量空间**.

度量空间是一种特殊的拓扑空间, 我们赋予了开集的意义.

定义 2 (开球). 对 $x \in X$, 定义 x 的**开球** $B(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$, 其中 $\varepsilon > 0$, 称为开球 B 的**半径**.

定义 3. 设 $O \subset X$, 对任意 $x \in O$, 总存在开球 $B(x, \varepsilon) \subset O$, 则称 O 为**开集**.

容易验证, 这样定义的开集满足拓扑公理.

度量空间中离散的两个点, 可以被两个不交的开集包含, 称这种性质为 Hausdorff 性. 一般地, 可以定义 Hausdorff 空间.

定义 4. 对任意 $x, y \in X$, $x \neq y$, 若总存在开集 O_x, O_y 满足 $O_x \cap O_y = \emptyset$, 则称 X 为**Hausdorff 空间**.

并非所有拓扑空间都具有 Hausdorff 性, 例如有限补拓扑空间, 包含任意两个离散的点的开集总相交.

定义 5 (点到点集的距离). 设 $x \in X$, $A \subset X$, 定义 x 到 A 的距离

$$d(x, A) = \inf \{d(x, y) : y \in A\}.$$

引理 1. 定义的 $d(x, A)$ 对 x 是连续的.

证明. 对任意 $\varepsilon > 0$, $x_0 \in X$, 使得 $d(x, x_0) < \varepsilon/2$, 存在 $y \in A$ 满足 $d(x_0, y) < d(x_0, A) + \varepsilon/2$, 则有

$$d(x, A) \leq d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) < d(x_0, A) + \varepsilon,$$

将 x 与 x_0 互换, 有 $d(x_0, A) < d(x, A) + \varepsilon$, 故 $|d(x, A) - d(x_0, A)| < \varepsilon$. □

引理 2. $d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$.

证明. $\Rightarrow$: $d(x, A) = \inf d(x, y) = 0, y \in A$, 于是对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 y_0 , 有

$$d(x, y_0) < \inf d(x, y) + \varepsilon = \varepsilon,$$

故 $B(x, \varepsilon) \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset$.

$\Leftarrow$: $x \in \bar{A}$, 故存在开集 $U \ni x$ 满足 $U \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 总存在 $y_0 \in A$, 使得 $d(x, y_0) < \varepsilon$, 故 $d(x, A) = \inf d(x, y_0) = 0$. $\square$

引理 3 (Urysohn). 设 A, B 为 X 上的两个不交闭集, 则存在 X 上的连续函数 f 使得 $|f(x)| \leq 1, f|_A = 1, f|_B = -1$.

证明. 因为 A, B 为不交闭集, 则 $d(x, A) + d(x, B) \neq 0$, 定义函数

$$f(x) = \frac{d(x, B) - d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)},$$

则由引理 1, 得 $f(x)$ 为符合条件的连续函数. $\square$

定理 1 (Tietze). 定义在度量空间中一闭集上的连续实值函数可以延拓到整个空间.

证明. 设 F 为 X 上的一闭集, f 是定义在 F 上的连续函数. 先考虑 f 有界的情形, 即存在 $M > 0$, 使得 $|f(x)| \leq M$.

设 $A = \{x \in F : M/3 \leq f(x) \leq M\}$, $B = \{x \in F : -M \leq f(x) \leq -M/3\}$, 由于连续映射下, 闭集的原像仍为闭集, 于是 A, B 为不交闭集. 由引理 3, 定义函数

$$g_1(x) = \frac{M}{3} \cdot \frac{d(x, B) - d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}, \quad x \in X,$$

则 $|g_1(x)| \leq \frac{M}{3}$, $|f(x) - g_1(x)| \leq \frac{2M}{3}$, 下面以 $f(x) - g_1(x)$ 为新的连续函数来研究, 则有

$$|g_2(x)| \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{M}{3},$$

$$|f(x) - g_1(x) - g_2(x)| \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{2M}{3}.$$

同理, 对任意 $k \in \mathbb{Z}^+$, 有

$$|g_k(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{M}{3},$$

$$\left|f(x) - \sum_{i=1}^k g_i(x)\right| \leq \frac{2^k M}{3^k},$$

由 Weierstrass 判别法可知 $\sum g_k(x)$ 是一致收敛的, 记其和函数为 $g(x)$, 则

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) = f(x).$$

且

$$|g(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{3^k} = M.$$

当 f 无界时, 考虑 $\arctan f(x)$ 即可. $\square$