

连续映射

定义 1 (连续映射). 设拓扑空间 X 和 Y , 映射 $f: X \rightarrow Y$, 若对 Y 中的任一开集 U , $f^{-1}(U)$ 为 X 中的开集, 则称 f 为从 X 到 Y 的连续映射.

定义 2 (同胚映射). 设映射 $f: X \rightarrow Y$ 满足以下条件:

1. f 是双射;
2. f 是连续映射;
3. f^{-1} 是连续映射.

则称 f 为从 X 到 Y 的同胚映射, 称拓扑空间 X 和 Y 同胚.

定理 1. 两个连续映射的复合仍为连续映射.

证明. 设 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ 为两个连续映射, 则对 Z 中任意开集 U , $g^{-1}(U)$ 为 Y 中的开集, $f^{-1}(g^{-1}(U))$ 为 X 中的开集. 于是 $g \circ f$ 为连续映射. $\square$

定理 2. 设连续映射 $f: X \rightarrow Y$, $A \subset X$, 并有 A 上的子空间拓扑, 则 f 在 A 上的限制映射 $f|_A: A \rightarrow Y$ 也是连续映射.

证明. 设开集 $O \subset Y$, 注意到 $(f|_A)^{-1}(O) = f^{-1}(O) \cap A$ 为开集. $\square$

定义 3 (恒等映射). 设映射 $\text{id}: X \rightarrow X$, $\text{id}(x) = x$, $x \in X$, 称 id 为 X 上的恒等映射.

定义 4 (嵌入映射). 设 $A \subset X$, 定义映射 $i: A \rightarrow X$, $i(x) = x$, $x \in A$, 称为 X 的嵌入映射.

定理 3. 下面五个命题等价.

1. $f: X \rightarrow Y$ 是一个连续映射;
2. 若 β 是 Y 的一个拓扑基, 则 β 的任意元素的原像都是开的;
3. 对任意 $A \subset X$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;
4. 对任意 $B \subset Y$, $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$;
5. Y 中任意闭集的原像都是闭的.

证明. $1 \rightarrow 2$: f 为连续映射, 则开集的原像都是开集, 而 β 中的元素为开集, 则原像仍为开集.

$2 \rightarrow 3$: 设 $A \subset X$, 显然 $f(A) \subset \overline{f(A)}$, 考虑 $x \in \overline{f(A)} \setminus f(A)$, 即证 $f(x)$ 为 $f(A)$ 的极限点. 考虑 Y 的拓扑基 β , 对 $B \in \beta$, 存在邻域 N , 使得 $f(x) \in B \subset N$, 下证 $N \setminus \{f(x)\} \cap f(A) \neq \emptyset$.

由于 B 的原像仍为开的, 故 $x \in f^{-1}(B)$ 为一开集, 又 x 为 A 的极限点, 故 $f^{-1}(B) \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset$, 于是 $B \setminus \{f(x)\} \cap f(A) \neq \emptyset$, 而 $B \subset N$, 故有 $N \setminus \{x\} \cap f(A) \neq \emptyset$.

$3 \rightarrow 4$: $f^{-1}(B) \in X$, 则 $f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset \overline{f(f^{-1}(B))} \subset \overline{B}$, 则

$$\overline{f^{-1}(B)} = f^{-1} \circ f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset f^{-1}(\overline{B}).$$

$4 \rightarrow 5$: 对任意闭集 $B \subset Y$, 有 $B = \overline{B}$, 则由命题 4, 有

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(\overline{B}) \supset \overline{f^{-1}(B)},$$

而显然 $f^{-1}(B) \subset \overline{f^{-1}(B)}$, 于是 $f^{-1}(B) = \overline{f^{-1}(B)}$, 故 $f^{-1}(B)$ 为闭集.

$5 \rightarrow 1$: 对任意闭集 $B \subset Y$, 有 $f^{-1}(B)$ 为闭集, 则 $Y \setminus B$ 和 $X \setminus f^{-1}(B)$ 均为开集, 而 $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$ 为开集, 故 f 为连续映射. $\square$