

紧空间

定义 1 (开覆盖). 设 X 为拓扑空间, 若存在一族开集组成的集族 $\mathcal{F}$, 使得 $\bigcup_{i \in I} O_i = X$, $O_i \in \mathcal{F}$, 则称 $\mathcal{F}$ 为 X 的一个开覆盖.

定义 2 (子覆盖). 设 $\mathcal{F}$ 是 X 的一个开覆盖, 若存在 $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$, 且 $\mathcal{F}'$ 也是 X 的一个开覆盖, 则称 $\mathcal{F}'$ 是 $\mathcal{F}$ 的子覆盖.

定义 3 (紧性). 若拓扑空间 X 的任一开覆盖都包含有限子覆盖, 则称 X 为紧的.

下面给出紧空间的若干性质.

定理 1. 紧空间在连续映射下的像仍是紧的.

证明. 不妨设连续映射 $f: X \rightarrow Y$ 是满射. 设 $\mathcal{F}$ 是 Y 的一族开覆盖, 由连续映射的定义, $\{f^{-1}(O) : O \in \mathcal{F}\}$ 是开集, $f^{-1}(O_i)_{i \in I}$ 给出了 X 的一个开覆盖, 又 X 是紧的, 故开覆盖存在有限子覆盖, 记为 $\{f^{-1}(O_i), 1 \leq i \leq k\}$, 有 $\bigcup_{i=1}^k f^{-1}(O_i) = X$, $f(X) = \bigcup_{i=1}^k O_i = Y$, 于是存在 $\mathcal{F}$ 的有限子覆盖, 故 Y 是紧的. $\square$

定理 2. 紧空间的任一闭子集仍是紧的.

证明. 设 X 为紧空间, $C \subset X$ 为闭集, 则 $X \setminus C$ 为开集, 存在 C 的一族开覆盖 $\mathcal{F} = \{O_i : i \in I\}$, $C \subset \bigcup_{i \in I} O_i$, 于是 $\bigcup_{i \in I} O_i \cup (X \setminus C)$ 是 X 的一个开覆盖, 而 X 是紧的, 故存在有限子覆盖 $\{O_i (1 \leq i \leq k), X \setminus C\}$, 于是 $O_i (1 \leq i \leq k)$ 是 C 的一族开覆盖, 为 $\mathcal{F}$ 的有限子覆盖, 故 C 是紧的. $\square$

紧空间的任一紧子集却不一定是闭的, 有以下结论.

定理 3. Hausdorff 空间的紧子集是闭的.

证明. 设紧集 A 是 Hausdorff 空间 X 的子集, 即证 $X \setminus A$ 为开集. 设 $x \notin A$, $z_i \in A$, 则对任意开集 $V_i \ni z_i$, 有 $U_i \ni x$ 使得 $U_i \cap V_i = \emptyset$, 由于 A 为紧集, 故存在正整数 k , 使得 $A \subset \bigcup_{i=1}^k V_i$, 令 $V = \bigcup_{i=1}^k V_i$, $U = \bigcap_{i=1}^k U_i$, 则 $U \cap V = \emptyset$, 故 $U \cap A = \emptyset$, $U \subset X \setminus A$, 于是 $X \setminus A$ 为开集, A 为闭集. $\square$

同胚映射需要保证双射、连续以及逆映射连续, 连续双射未必是同胚映射, 在从紧空间到 Hausdorff 空间的映射却是成立的.

定理 4. 从紧空间到 Hausdorff 空间的连续双射是同胚映射.

证明. 设 $f: X \rightarrow Y$, 闭集 $C \subset X$, 则由定理 2, C 为紧集. 由定理 1, $f(C)$ 为紧的, 由定理 3, $f(C)$ 是闭的, 由连续映射等价命题, f^{-1} 连续, 故 f 为同胚映射. $\square$

定理 5 (Bolzano-Weierstrass). 紧空间的任一无限子集必有至少一个极限点.

证明. 设 X 为紧空间, $S \subset X$ 没有极限点, 下证 S 为有限集.

对任意 $x \in X$, 存在开集 $O(x)$, 满足

$$O(x) \cap S = \begin{cases} \emptyset, & x \notin S, \\ \{x\}, & x \in S, \end{cases}$$

否则 S 有极限点. 取遍 x , 可以得到一族 $O(x)$ 构成 X 的开覆盖. 由于 X 是紧的, 故开覆盖存在有限子覆盖, 有 $x_1, \dots, x_k$, 使得 $X \subset \bigcup_{i=1}^k O(x_i)$, 而 $O(x_i)$ 至多包含 S 中的一个点, 于是 S 为有限集. $\square$

定理 6 (Heine-Borel). 实数轴上任一闭区间是紧集.

证明. 对任意 $[a, b] \in \mathbb{R}$, 定义它的一族开覆盖 $\mathcal{F}$. 设 $A \subset [a, b]$, 以如下方式定义.

$$X = \{x \in [a, b] : \text{存在 } \mathcal{F} \text{ 的有限子覆盖包含 } [a, x]\}.$$

于是 X 非空 ($a \in X$) 且有界 $x \leq b$, 由确界原理, X 有上确界. 设 $s = \sup X$, 下证 $s \in X$ 且 $s = b$.

设 $s \in O \in \mathcal{F}$, 由于 O 是开集, 故存在 $\varepsilon > 0$, $(s - \varepsilon, s] \subset O$, 若 $s < b$, 则有 $(s - \varepsilon, s + \varepsilon) \subset O$. 对任意 $\varepsilon > 0$, 有 $s - \varepsilon \in X$, 于是 $[a, s - \varepsilon] \subset X$, 故 $[a, s - \varepsilon]$ 可被 $\mathcal{F}$ 的有限子覆盖 $\bigcup_{i=1}^k U_i$ 包含, 又 $(s - \varepsilon, s] \subset O$, 于是 $[a, s]$ 可被 $O \cup \bigcup_{i=1}^k U_i$ 包含, 故 $s \in X$.

若 $s < b$, 则 $s + \varepsilon/2 \in (s - \varepsilon, s + \varepsilon) \subset O$, 有 $s + \varepsilon/2 \in X$, 这与 s 是 X 的上确界矛盾! 于是 $s = b$. $\square$

推论 1. Euclidean 空间上的有界闭集是紧集.

证明. 由两个紧空间的积空间仍为紧空间即得. $\square$

定理 7. Euclidean 空间上的紧集是有界闭集.

证明. 设 $A \subset \mathbb{R}^n$, Euclidean 空间显然是 Hausdorff 空间, 由定理 3, A 是闭集. 构造一系列开球 $\{B(0, r_k), r_k = k, k \in \mathbb{Z}^+\}$, 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开覆盖, 自然是 A 的一个开覆盖. 又 A 是紧集, 故该开覆盖存在有限子覆盖, 于是 r_i 有限, A 有界. $\square$

于是, 在 Euclidean 空间中, 有界闭集和紧集是等价的.

定理 8. 定义在紧空间上的连续实值函数有界且能达到边界.

证明. 设 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, 由定理 1, $f(X) \subset \mathbb{R}$ 是紧的, 由定理 7, $f(X)$ 是有界闭集. 又闭集的性质, 存在 $x_1, x_2 \in X$, $f(x_1) = \inf f(X)$, $f(x_2) = \sup f(X)$, 于是函数有界且能达到边界. $\square$

定理 9 (Lebesgue 数引理). 设 X 为紧度量空间, $\mathcal{F}$ 为 X 的一个开覆盖, 则存在 $\delta > 0$ (称为 Lebesgue 数), 使得对任意 $x \in X$, 存在 $U \in \mathcal{F}$, $B(x, \delta) \subset U$.

证明. 反证法, 设序列 $\{A_n\}$ 是 X 的一列子集, 每一项都不包含于 $\mathcal{F}$ 的任一开集中, 且序列的直径趋于 0. 对每个 $n \in \mathbb{Z}^+$, 存在 $x_n \in A_n$. 对于序列 $\{x_n\}$, 要么包含有限个离散的点, 存在某点无限重复出现, 要么包含无限个点, 由于 X 是紧的, 故存在极限点.

记无限重复出现的点或极限点为 p , 设 $U \in \mathcal{F}$ 是包含 p 的开集, 则存在 $\varepsilon > 0$, $B(p, \varepsilon) \subset U$, 存在足够大的正整数 N , 使得 A_N 的直径小于 $\varepsilon/2$ 且 $x_N \in B(p, \varepsilon/2)$, 于是对 $x \in A_N$, 有 $d(x_N, p) < \varepsilon/2$, $d(x, x_N) < \varepsilon/2$, 于是

$$d(x, p) < d(x, x_N) + d(x_N, p) < \varepsilon.$$

即 $A_N \subset U$, 这与 A_n 的构造假设矛盾!

□

定义 4 (局部紧). 若拓扑空间 X 中每一点都有紧的邻域, 则称 X 是**局部紧**的.

定义 5 (单点紧化).