Lebesgue 测度论

目录

第一部分 $\mathbb{R}^n$ 的拓扑

1 度量空间，n 维 Euclid 空间

把多个元素放在一起就构成了集合，但是集合间的元素是松散的. 我们还需要定义集合的元素之间的“关系”或“结构”，有了这层“关系”或“结构”，就构成了一个**空间**.

定义 1 (度量空间). 设 X 是一个集合，若对于 X 中任意两个元素 x, y，都有唯一确定的实数 $d(x, y)$ 与之对应，而且这一对应关系满足下列条件：

1. $d(x, y) \geqslant 0$，当且仅当 $x = y$ 时等号成立；
2. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(y, z)$，对任意 z 都成立，

则称 $d(x, y)$ 是 x, y 之间的**距离**，称 (X, d) 为**度量空间**或**距离空间**.X 中的元素称为**点**，条件 (2) 称为**三点不等式**.

注. *距离 d 有对称性，即 $d(x, y) = d(y, x)$. 事实上，在三点不等式中取 $z = x$，则*

$$d(x, y) \leqslant d(x, x) + d(y, x) = d(y, x).$$

由于 x, y 的次序是任意的，同理可证 $d(y, x) \leqslant d(x, y)$，这就得到 $d(x, y) = d(y, x)$.

注. *如果 (X, d) 是度量空间，Y 是 X 的一个非空子集，则 (Y, d) 也是一个度量空间，称为 X 的***子空间**.

定义 2 (n 维 Euclid 空间). 设 n 是一个正整数，将由 n 个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 按确定的次序排成的数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的全体组成的集合记为 $\mathbb{R}^n$，对 $\mathbb{R}^n$ 中任意两点

$$x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n), \qquad y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n),$$

规定距离

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i)^2}.$$

容易验证 $d(x, y)$ 满足距离的条件. 将 $(\mathbb{R}^n, d)$ 称为n **维** Euclid **空间**，其中 d 称为 Euclid **距离**.

注. *对 $d(x, y)$ 满足距离的条件的验证：首先，条件 (1) 显然成立，对于条件 (2)，由 Cauchy-Schwarz 不等式*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

得到

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}b_i^2\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2}+\sum_{i=1}^{n}b_i^2\\ &= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\right)^2.\end{aligned}$$

令 $z=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)$，$a_i=\zeta_i-\xi_i$，$b_i=\eta_i-\zeta_i$，则

$$\eta_i-\xi_i=a_i+b_i.$$

代入上面不等式即为三点不等式.

此外，在 $\mathbb{R}^n$ 中还可以用下面的方法定义其他的距离：

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|.$$

容易验证 ρ 也满足条件 (1) 和条件 (2).（称 ρ 为 Manhattan 距离）由此可知，在一个集合中引入距离的方法可以不限于一种. 之后我们仅讨论 n 维 Euclid 空间和 Euclid 距离 $d(x,y)$.

下面我们将考察 $\mathbb{R}^n$ 中的极限、开集、闭集、紧集等一系列概念，它们的基础都是邻域，而邻域仅依靠距离即可作出. 本章的结论对于一般的度量空间也是成立的，之后在泛函分析的学习中还会涉及.

我们从定义邻域的概念开始.

定义 3 (邻域). $\mathbb{R}^n$ 中所有和定点 P_0 的距离小于定数 $\delta(>0)$ 的点的全体，即集合

$$\{P|d(P,P_0)<\delta\}$$

称为点 P_0 的 δ **邻域**，记作 $U(P_0,\delta)$.P_0 称为邻域的**中心**，δ 称为邻域的**半径**. 在不需要特别指出是怎样的一个半径时，也干脆说是 P_0 的一个邻域，记作 $U(P_0)$. 显然，在 $\mathbb{R}$，$\mathbb{R}^2$，$\mathbb{R}^3$ 中的 $U(P_0,\delta)$ 就是以 P_0 为中心，δ 为半径的**开区间**，**开圆**和**开球**.

容易证明邻域具有下面的基本性质：

性质 1.

1. $P\in U(P)$；
2. 对于 $U_1(P)$ 和 $U_2(P)$，存在 $U_3(P)\subset U_1(P)\cap U_2(P)$；
3. 对于 $Q\in U(P)$，存在 $U(Q)\subset U(P)$；

4. 对于 $P \neq Q$，存在 $U(P)$ 和 $U(Q)$，使 $U(P) \cap U(Q) = \varnothing$.

定义 4 (极限). 设 $\{P_n\}$ 为 $\mathbb{R}^m$ 中一点列，$P_0 \in \mathbb{R}^m$，如果当 $n \to \infty$ 时有 $d(P_n, P_0) \to 0$，则称点列 $\{P_n\}$ **收敛于**P_0. 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$ 或 $P_n \to P_0(n \to \infty)$.

注. 用邻域的术语来定义 $\{P_n\}$ 收敛于 P_0：对于 P_0 的任一邻域 $U(P_0)$，存在某个自然数 N，对任意 $n > N$，都有 $P_n \in U(P_0)$.

定义 5 (点集的距离). 两个非空点集 A, B 的距离定义为

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) | x \in A, y \in B\}.$$

注. 特别地，当其中一个点集为单点集时，我们就定义了点与点集的距离.

定义 6 (点集的直径). 一个非空点集 E 的**直径**定义为

$$\delta(E) = \sup_{P,Q \in E} d(P, Q).$$

定义 7 (有界点集). 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中一点集，若 $\delta(E) < \infty$，则称 E 为**有界点集**.

注. 空集也作为有界点集.

注. 显然，E 为有界点集的充要条件是存在常数 $K > 0$，使对于所有的 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in E$，都有 $|x_i| \leqslant K(i = 1, 2, \cdots, n)$. 这等价于：存在 $K > 0$，对所有 $x \in E$，都有 $d(x, \mathbf{0}) \leqslant K$，这里 $\mathbf{0} = (0, 0, \cdots, 0)$，称为 n 维 *Euclid* 空间的原点.

定义 8. 点集 $\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | a_i < x_i < b_i,\ i = 1, 2, \cdots, n\}$ 称为一个**开区间**（n 维），若将其中不等式一律换成 $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 1, 2, \cdots, n$，则称之为一个**闭区间**. 类似地，我们还可以定义左开右闭区间、左闭右开区间. 当上述各种区间无区别的必要时，统称为**区间**，记作 I. 把 $b_i - a_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 称为 I 的第 i 个“边长”，$\prod\limits_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$ 称为 I 的“体积”，记为 $|I|$.

2 内点，界点，聚点

定义 9 (内点，外点，界点). 如果存在 P_0 的某一邻域 $U(P_0)$，使 $U(P_0) \subset E$，则称 P_0 为 E 的**内点**. 如果 P_0 是 E^c 的内点，则称 P_0 是 E 的**外点**. 如果 P_0 既非 E 的内点又非 E 的外点，也就是说 P_0 的<u>任一</u>邻域既有属于 E 的点，又有不属于 E 的点，则称 P_0 为 E 的**界点**或**边界点**.

注. 上述三个概念中当然以内点最为重要，因为其他两个概念都是由此派生出来的.

定义 10 (聚点). 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中一点集，P_0 为 $\mathbb{R}^n$ 中一定点，如果 P_0 的任一邻域内都含有无穷多个属于 E 的点，则称 P_0 为 E 的一个**聚点**.

注. *由聚点定义可知有限集没有聚点.*

定理 1. 下面三个陈述是等价的：

1. P_0 是 E 的聚点；
2. 在 P_0 的任一邻域内，至少含有一个属于 E 而异于 P_0 的点；
3. 存在 E 中互异的点所成点列 $\{P_n\}$，使 $P_n \to P_0(n \to \infty)$.

显然 E 的内点一定是 E 的聚点，但 E 的聚点不一定是 E 的内点，还可能是 E 的界点. 其次，E 的内点一定属于 E，但 E 的聚点可以属于 E 也可以不属于 E.

定义 11 (孤立点). 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中一点集，P_0 为 $\mathbb{R}^n$ 中一定点，如果 P_0 属于 E 但不是 E 的聚点，则 P_0 称为 E 的**孤立点**.

注. *由定理 1可知*,P_0 *是* E *的孤立点的充要条件是*:*存在* P_0 *的某邻域* $U(P_0)$,*使得* $E \cap U(P_0) = \{P_0\}$. *由此又知，* E **的界点不是聚点就是孤立点**.

综上所述，所有 $\mathbb{R}^n$ 中的点，对 E 来说可以分为内点、界点、外点或分为聚点、孤立点、外点. 但是，对一个具体的点集 E 来说，以上两种分类的三种点不一定都出现. 界点和聚点可以属于 E，也可以不属于 E.

根据上面引入的概念，对于一个给定的点集 E，我们可以考虑上述各种点的集合，其中最重要的是下面四种.

定义 12. 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个点集，有

1. E 的全体内点所成的集合，称为 E 的**开核**，记作 $\mathring{E}$.
2. E 的全体聚点所成的集合，称为 E 的**导集**，记作 E'.
3. E 的全体界点所成的集合，称为 E 的**边界**，记作 ∂E.
4. $E \cup E'$ 称为 E 的**闭包**，记作 $\overline{E}$.

它们都可以用集合的语言描述如下.

1. $\mathring{E} = \{x | \exists\, U(x) \subset E\}$;
2. $E' = \{x | \forall\, U(x),\ U(x) \cap E \backslash \{x\} \neq \varnothing\}$;
3. $\partial E = \{x | U(x) \cap E \neq \varnothing 且 U(x) \cap E^c \neq \varnothing\}$;
4. $\overline{E} = \{x | \forall\, U(x),\ U(x) \cap E \neq \varnothing\}$.

注. 由 *(4)* 可以看出，闭包就是包含 E 的内点、界点、聚点、孤立点（可能会有重合）而只不含 E 的外点的集合.

注. 由 *(4)* 还可得到

$$\overline{E} = E \cup \partial E = \mathring{E} \cup \partial E = E' \cup \{E\text{的孤立点}\}$$

以及闭包与内核的对偶关系

$$(\mathring{E})^c = \overline{E^c}, \qquad (\overline{E})^c = \mathring{E^c}.$$

定理 2. 设 $A \subset B$，则 $A' \subset B'$, $\mathring{A} \subset \mathring{B}$, $\overline{A} \subset \overline{B}$.

定理 3. $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

证明. 因为 $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$，故从定理 2可知，$A' \subset (A \cup B)'$, $B' \subset (A \cup B)'$，从而

$$A' \cup B' \subset (A \cup B)'.$$

另一方面，假设 $P \in (A \cup B)'$，则必有 $P \in A' \cup B'$. 即 $(A \cup B)' \subset A' \cup B'$. 否则，若 $P \notin A' \cup B'$，那么将有 $P \notin A'$ 且 $P \notin B'$. 因而有 P 的某一邻域 $U_1(P)$，在 $U_1(P)$ 内除 P 外不含 A 的任何点，同时有 P 的某一邻域 $U_2(P)$，在 $U_2(P)$ 内除 P 外不含 B 的任何点，则由邻域的基本性质 (2) 知，存在 $U_3(P) \subset U_1(P) \cap U_2(P)$，在 $U_3(P)$ 中除点 P 外不含 $A \cup B$ 中的任何点，这与 $P \in (A \cup B)'$ 的假设矛盾. □

定理 4 (Bolzano-Weierstrass 定理)**.** 有界无限点集至少有一个聚点.

证明方法同数学分析中 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}^2$ 时的证明，在此不再赘述.

定理 5. 设 $E \neq \varnothing$, $E \neq \mathbb{R}^n$，则 E 至少有一界点（即 $\partial E \neq \varnothing$）.

证明. 设 $P_0 \in E$, $P_1 \in E^c$，定义 $P_t = (1-t)P_0 + tP_1$, $t \in [0,1]$. 设 $t_0 = \sup\{t | P_t \in E\}$. 下证 $P_{t_0} \in \partial E$.

若 $P_{t_0} \in E$，则 $t_0 \neq 1$. 对任意 $t \in (t_0, 1]$，$P_t \notin E$. 对任意 $\delta > 0$，存在 $t \in (t_0, 1]$，使得 $P_t \in E^c \cap U(P_{t_0}, \delta)$，于是 $P_{t_0} \in \partial E$.

若 $P_{t_0} \in E^c$，即 $P_{t_0} \notin E$，则 $t_0 \neq 0$. 存在 $t_n \in [0, t_0)$，$t_n \to t_0$，且 $P_{t_n} \in E$. 对任意 $\delta > 0$，存在 $P_{t_n} \in E \cap U(P_{t_0}, \delta)$. 因 $P_{t_0} \in U(P_{t_0}, \delta) \cap E^c$，于是也有 $P_{t_0} \in \partial E$. □

3 开集、闭集、紧集、完备集

定义 13 (开集)**.** 设 $E \subset \mathbb{R}^n$，如果 E 的每一点都是 E 的内点，则称 E 为**开集**.

例如整个空间 $\mathbb{R}^n$ 是开集，空集是开集，在 $\mathbb{R}$ 中任意开区间 (a,b) 是开集，在 $\mathbb{R}^2$ 中 $E = \{(x,y) | x^2 + y^2 < 1\}$ 是开集（但它在 $\mathbb{R}^3$ 中就不是开集了，想想看，这是为什么？）.

定义 14 (闭集)**.** 设 $E \subset \mathbb{R}^n$，如果 E 的每一个聚点都属于 E，则称 E 为**闭集**.

例如整个空间 $\mathbb{R}^n$ 是闭集，空集是闭集，在 $\mathbb{R}$ 中任意闭区间 $[a,b]$ 是闭集，任意的有限集合都是闭集.

开集、闭集利用开核、闭包等术语来说，就是

E 为开集 $\iff E \subset \mathring{E}$，即 $E = \mathring{E}$.

E 为闭集 $\iff E' \subset E$(或 $\partial E \subset E$).

今后开集常用字母 G 表示，闭集常用字母 F 表示.

定理 6. 对任何 $E \subset \mathbb{R}^n$，$\mathring{E}$ 是开集，E' 和 $\overline{E}$ 都是闭集.（这也是 $\mathring{E}$ 称为开核，$\overline{E}$ 称为闭包的缘由）

证明. 首先证明 $\mathring{E}$ 是开集. 设 $P \in \mathring{E}$，由 E 的定义知，存在邻域 $U(P) \subset E$，对于任意的 $Q \in U(P)$，由邻域的基本性质 (3) 知，存在 $U(Q)$ 使得 $U(Q) \subset U(P) \subset E$，即 Q 是 E 的内点，故 $U(P) \subset \mathring{E}$，所以 P 是 $\mathring{E}$ 的内点，故 $\mathring{E}$ 是开集.

其次证明 E' 是闭集. 设 $P_0 \in (E')'$，则由定理 1(2) 可知，在 P_0 的任一邻域 $U(P_0)$ 内，至少含有一个属于 E' 而异于 P_0 的点 P_1. 因为 $P_1 \in E'$，于是又有属于 E 的 $P_2 \in U(P_0)$，而且还可以要求 $P_2 \neq P_0$，再次利用该定理，即得 $P_0 \in E'$. 所以 E' 是闭集.

最后证明 $\overline{E}$ 是闭集. 由闭包的定义及定理 3，有

$$(\overline{E})' = E' \cup (E')' \subset E' \cup E' = E' \subset \overline{E}.$$

从而 $\overline{E}$ 是闭集. □

定理 7 (开集与闭集的对偶性)**.** 设 E 是开集，则 E^c 是闭集；设 E 是闭集，则 E^c 是开集.

证明. 只需证明第一部分.

证法一：设 E 是开集，而 P_0 是 E^c 的任一聚点，那么，P_0 的任一邻域都有不属于 E 的点. 这样 P_0 就不可能是 E 的内点，从而不属于 E（因为 E 是开集），也就是 $P_0 \in E^c$. 由闭集的定义得 E^c 为闭集.

证法二：设 E 是开集，则 $E = \mathring{E}$，由闭包、开核对偶关系，得 $\overline{E^c} = (\mathring{E})^c = E^c$，可见 E^c 是闭集. □

由于开集和并集的这种对偶关系，在许多情形下，我们将闭集看作是开集派生出来的概念. 也就是说，如果定义了开集，闭集也就随之确定.

定理 8. 任意多个开集的并仍是开集，有限多个开集的交仍是开集.

证明. 第一部分显然. 对第二部分，有限多个开集的交仍是开集总能递归为两个开集的交仍是开集. 故只需证明两个开集的交的情况.

设 G_1, G_2 为开集，任取 $P_0 \in G_1 \cap G_2$. 因 $P_0 \in G_i (i=1,2)$，故存在 $U_i(P_0) \subset G_i (i=1,2)$. 由邻域的基本性质 (2)，存在 $U_3(P_0) \subset U_1(P_0) \cap U_2(P_0)$，从而 $U_3(P_0) \subset G_1 \cap G_2$，可见 P_0 是 $G_1 \cap G_2$ 的内点. □

注. 任意多个开集的交不一定是开集. 例如

$$G_n = \left(-1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right),\ n=1,2,\cdots,$$

每个 G_n 是开集，但 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n = [-1,1]$ 不是开集.

定理 9. 任意多个闭集的交仍为闭集，有限多个闭集的并仍为闭集.

证明. 利用 De Morgan 公式.

设 $\Lambda=\{1,2,\cdots\}$，$F_i, i\in\Lambda$（或 $i=1,2,\cdots,m$）是闭集，则由开集和并集的对偶关系知 F_i^c 是开集，从而由定理 8知，$\bigcup\limits_{i\in\Lambda} F_i^c$（或 $\bigcap\limits_{i=1}^{m} F_i^c$）也是开集，由 De Morgan 公式有

$$\bigcap_{i\in\Lambda} F_i = (\bigcup_{i\in\Lambda} F_i^c)^c \quad \text{或} \bigcup_{i=1}^{m} F_i = (\bigcap_{i=1}^{m} F_i^c)^c,$$

故再由开集和并集的对偶关系可知 $\bigcap\limits_{i\in\Lambda} F_i$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{m} F_i$ 是闭集. □

注. 任意多个闭集的并不一定是闭集. 例如

$$F_n = \left[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right],\ n=3,4,\cdots,$$

每个 F_n 是闭集，但 $\bigcup\limits_{n=3}^{\infty} F_n = (0,1)$ 不是闭集.

性质 2. 设 F_1, F_2 是 $\mathbb{R}$ 中两个互不相交的闭集，则存在两个互不相交的开集 G_1, G_2，使 $G_1\supset F_1,\ G_2\supset F_2$.

在数学分析中我们已经学习了以下形式的 Heine-Borel 有限覆盖定理：设 I 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭区间，$\mathcal{M}$ 是一族开区间，它覆盖了 I，则在 $\mathcal{M}$ 中一定存在有限多个开区间，它们同样覆盖了 I.

我们下面要把上述定理推广成更一般的形式.

定理 10 (Heine-Borel 定理)**.** 设 F 是一个有界闭集，$\mathcal{M}$ 是一族开集，它覆盖了 F，则在 $\mathcal{M}$ 中一定存在有限多个开集，它们同样覆盖了 F.

证明. 因 F 是有界闭集，所以在 $\mathbb{R}^n$ 中存在闭区间 I 包含 F. 记 $\mathcal{D}$ 为由 $\mathcal{M}$ 中的全体开集与开集 F^c 一起组成的新开集族，则 $\mathcal{D}$ 覆盖了 $\mathbb{R}^n$，因此也覆盖了 I. 对于 I 中任一点 P，存在 $\mathcal{D}$ 中开集 U_P，使得 $P\in U_P$，因而存在开区间 $I_P\subset U_P$，并且 $P\in I_P$，所以开区间族 $\{I_P|P\in I\}$ 覆盖了 I. 由数学分析中的有限覆盖定理，在这族开区间中存在有限个开区间，设为 $I_{P_1}, I_{P_2},\cdots, I_{P_m}$ 仍然覆盖了 I，则由 $F\subset I$，及 $I_{P_i}\subset U_{P_i}(i=1,2,\cdots,m)$，得 $F\subset\bigcup\limits_{i=1}^{m} U_{P_i}$. 如果开集 F^c 不在这 m 个开集中，则 $U_{P_1}, U_{P_2},\cdots, U_{P_m}$ 覆盖了 F，定理得证；否则从这 m 个开集中去掉 F^c，因为 F^c 与 F 不相交，所以剩下的 $m-1$ 个开集仍然覆盖了 F. □

定义 15 (紧集). 设 M 是度量空间 X 中一集合，$\mathcal{M}$ 是 X 中任一族覆盖了 M 的开集，如果必可从 $\mathcal{M}$ 中选出有限个开集仍然覆盖 M，则称 M 为 X 中的**紧集**.

由 Heine-Borel 定理知 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集必为紧集，是否 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集都是有界闭集呢？答案是肯定的，我们有以下定理.

定理 11. 设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集，则 M 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集.

证明. 设点 $Q \in M^c$，对于 M 中的任意一点 P，由于 $P \neq Q$，由邻域性质，存在 $\delta_P > 0$，使得

$$U(P,\delta_P) \cap U(Q,\delta_P) = \varnothing.$$

显然开集族 $\{U(P,\delta_P) | P \in M\}$ 覆盖了 M，由于 M 是紧集，因此存在有限个邻域 $U(P_i,\delta_{P_i})(i=1,2,\cdots,m)$，使得

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{m} U(P_i,\delta_{P_i}) \tag{1}$$

由此立即可知 M 是有界集. 又令

$$\delta = \min\{\delta_{P_1},\delta_{P_2},\cdots,\delta_{P_m}\},$$

则 $\delta > 0$，并且 $U(Q,\delta) \cap U(P_i,\delta_i) = \varnothing (i=1,2,\cdots,m)$，由 1式得 $U(Q,\delta) \cap M = \varnothing$，因此 Q 不是 M 的聚点，所以 $M' \cap M^c = \varnothing$，这说明 $M' \subset M$，即 M 是闭集. □

注. 上述定理说明了 $\mathbb{R}^n$ 中紧集和有界闭集是一致的. 但是在一般的度量空间中，紧集一定是有界闭集（与上述定理证明相类似），但有界闭集不一定是紧集.

定义 16 (自密集). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$，如果 $E \subset E'$，就称 E 是**自密集**.

注. 换句话说，当集合中每点都是这个集的聚点时，这个集是自密集. 另一个说法是没有孤立点的集是自密集.

例如，空集是自密集，$\mathbb{R}$ 中有理数全体组成的集是自密集.

定义 17 (完备集). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$，如果 $E = E'$，就称 E 是**完备集**或**完全集**.

可以看出，完备集就是自密闭集，即没有孤立点的闭集. 例如，空集是完备集，$\mathbb{R}$ 中任一闭区间 $[a,b]$ 及全直线都是完备集.

下面我们简单介绍直线上（即 $\mathbb{R}$ 中）开集与闭集的构造.

在直线上，开区间是开集，但是开集不一定是开区间，它往往是一系列开区间的并集. 为研究直线上开集的结构，我们先引入构成区间的概念.

定义 18 (构成区间)**.** 设 G 是直线上的开集，如果开区间 $(\alpha,\beta)\subset G$，而且端点 $\alpha,\beta\notin G$，那么称 (α,β) 为 G 的**构成区间**.

定理 12 (开集构造定理)**.** 直线上任一个**非空开集**可以表示成**至多可数个**互**不相交**的构成区间的并.

证明. □

既然闭集的余集是开集，那么从开集的构造可以引入余区间的概念.

定义 19 (余区间)**.** 设 A 是直线上的闭集，称 A 的余集 A^c 的构成区间为 A 的**余区间**或**邻接区间**.

我们得到闭集的构造如下：

定理 13. 直线上的闭集 F 或者是全直线，或者是从直线上挖掉至多可数个互不相交的开区间所得到的集.

由孤立点的定义很容易知道，直线上点集 A 的孤立点必是包含在 A 的余集中的某两个开区间的公共端点. 因此，闭集的孤立点一定是它的两个余区间的公共端点. 完备集是没有孤立点的闭集，所以，**完备集就是没有相邻接的余区间的闭集**.

4 Cantor 三分集

下面我们将讨论 Cantor 三分疏朗集，这是实分析中的一个重要概念，也常作为反例出现. 为此我们先给出疏朗集和稠密集的定义.

定义 20 (稠密和疏朗)**.** 设 $E\subset\mathbb{R}^n$，

1. 设 $F\subset\mathbb{R}^n$，若对任意 $x\in F$ 和任意邻域 $U(x)$，$U(x)\cap E\neq\varnothing$，则称 E 在 F 中**稠密**.
2. 若对任意 $x\in\mathbb{R}^n$ 和任意邻域 $U(x)$，存在 $U(y)\subset U(x)\cap E^c$，则称 E 是**疏朗集**或**无处稠密集**.

例如有限点集或收敛可数列都是疏朗集，有理点集 $\mathbb{Q}^n$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密.

定义 21 (Cantor 三分集)**.** 将 $E_0=[0,1]$ 三等分，去掉中间的开区间，剩下两个闭区间，记这两个闭区间的并为 E_1，再把剩下的两个闭区间分别三等分，分别去掉中间的开区间，剩下 2^2 个闭区间，记这些闭区间的并为 E_2. 以此类推，当进行到第 n 次时，一共去掉 2^{n-1} 个开区间，剩下 2^n 个长度为 3^{-n} 的相互隔离的闭区间，记这些闭区间的并为 E_n. 如此继续下去，就从 $[0,1]$ 中去掉了可数多个互不相交且没有公共端点的开区间. 由定理 13，剩下的必是一个闭集，称它为 Cantor **三分集**，记为 P.

下面列举了 Cantor 集 P 的一些性质.

性质 3. 1. P 是完备集.

2. P 没有内点.

3. P 是零测集.

4. P 的基数为 $\aleph$.

综上所述，我们将 Cantor 三分集的特点归纳为：它是一个测度为零且基数为 $\aleph$ 的疏朗完备集.

第二部分 Lebesgue 测度论

虽然我们在小学时期就学习了长度、面积等相关概念，但事实上我们从未严格定义过长度、面积和体积. 下面我们尝试定义这些概念.

我们可以把“长度”看作是 1 维实空间 $\mathbb{R}$（即实数轴）的一个子集类 X（$\mathbb{R}$ 的每个子集不一定都有“长度”）到实数域的一个映射 m. 我们首先规定

$$m([a,b]) \coloneqq b-a.$$

其中 $a \leqslant b$. 这表明任何闭区间 $[a,b]$ 的长度为 $b-a$，并蕴含了实数轴上任意一点的长度为零. 然后我们可以列出几条公理（姑且称它们为公理）：设有实数轴上的一些点集构成的集类 $\mathcal{M}$，对于每个 $E \in \mathcal{M}$，都对应一个实数 m，有以下性质：

1. 非负性：$m(E) \geqslant 0$；
2. 有限可加性：若 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 两两不相交，则 $m\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} m(E_i)$；
3. 正则性：$m([a,b]) = b-a$.

若集合 A 可通过平面上的正交变换（平面的正交变换即为平移、旋转、反射以及它们的乘积）变成了 B，则称 A 和 B **全等**或**合同**. 我们规定，$m(A) = m(B)$ 当且仅当 $A \cong B$.

由于任意一点的长度都是零，由可加性公理可知开区间 (a,b) 的长度也是 $b-a$，半开半闭区间的长度亦然. 为了让整个实数轴也有长度，我们规定 m 可以取到 $+\infty$.

类似地，我们可以把面积看作是 2 维实空间 $\mathbb{R}^2$（即实平面）的一个子集类 X 到实数域 $\mathbb{R}$ 的一个映射 m. 我们首先规定一个邻边长分别为 a 和 b 的矩形 A 的面积为 $a \cdot b,\ a,b \geqslant 0$. 这蕴含了线段的面积为零. 以上的三条定理可以“原封不动”地来刻画面积. 依次下去，还可以进一步把长度、面积的概念推广到体积以及 n 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中. 事实上物理中的**功** (work)，**位移** (displacement)，**冲量** (impulse) 都满足以上三条公理. 此外，我们从长度公理中仅能求出有限个区间的并的长度，对于无限个点集的并，长度公理就无能为力了. 因此，我们可以考虑用一个统一的概念来描述长度、面积等等，并设法扩充其测量的范围，这就引出了**测度** (measure) 的概念.

显然，一下子推广到不可数无穷多个区间的长度是不现实的，我们退而求其次，考虑可数个区间的” 长度”，就有 Lebesgue 提出的测度公理：

实数轴上的一些点集构成的集类 $\mathcal{M}$，对于每个 $E \in \mathcal{M}$，都对应一个实数 m，满足：

1. 非负性：$m(E) \geqslant 0$；
2. 可数可加性：若 $E_1, E_2, \cdots, E_n, \cdots$ 两两不相交，则 $m\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} m(E_i)$；
3. 正则性：$m([a,b]) = b-a$.

我们提出以下问题：满足 Lebesgue 测度公理且在集类 $\mathcal{M}$ 上定义的实函数 $m(E)$ 是否存在？$\mathcal{M}$ 由哪些集合构成？是否每个集合都有测度？这就是本章要讨论的内容.

5 Lebesgue 外测度

定义 22 (Lebesgue 外测度). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$，定义 E 的 Lebesgue 外测度为

$$m^*E = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |I_n|,\ \sum_{i=1}^{\infty} I_n \supset E\}$$

其中 I_n 是开域.

外测度具有以下三条基本性质：

定理 14. 1. 非负性：$m^*E \leqslant 0$，规定 $m^*\varnothing = 0$；

2. 单调性：设 $A \subset B$，则 $m^*A \leqslant m^*B$；

3. 次可数可加性：$m^*\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} m^*(E_i)$.

证明. (1) 显然成立.

(2) 的证明. 设 $A \subset B$，则任一列覆盖 B 的开域 $\{I_n\}$ 一定也是覆盖 A 的，因而

$$m^*A \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |I_n|,$$

对所有能覆盖 B 的开域列取下确界即得

$$m^*A \leqslant \inf \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| = m^*B.$$

(3) 的证明. 任给 $\varepsilon > 0$，由 Lebesgue 外测度定义，对每个 n 都应有一列开区间 $I_{n,1}, I_{n,2}, \cdots, I_{n,m}, \cdots$，使 $E_n \subset \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} I_{n,m}$ 且

$$\sum_{m=1}^{\infty} |I_{n,m}| \leqslant m^*E_n + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

从而

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n,m=1}^{\infty} I_{n,m},$$

且

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} |I_{n,m}| = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} |I_{n,m}| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\left(m^*E_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*E_n + \varepsilon.$$

可见

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leqslant \sum_{n,m=1}^{\infty} |I_{n,m}| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m^*E_n + \varepsilon.$$

由于 ε 的任意性，得

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i).$$

□

定理 15. 设区间 I，则 $m^*I = |I|$.

证明. 1. 设 I 是闭区间. 对于任给的 $\varepsilon > 0$，存在开区间 I'，使得 $I \subset I'$ 且

$$|I'| < |I| + \varepsilon.$$

由外测度定义，$m^*I < |I| + \varepsilon$，由 ε 的任意性，有

$$m^*I \leqslant |I|.$$

现在来证明 $m^*I \geqslant |I|$. 对于任给 $\varepsilon > 0$，存在一列开区间 $\{I_i\}$，使 $I \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_i$，且 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |I_i| < m^*I + \varepsilon$.

由 Heine-Borel 有限覆盖定理，在 $\{I_i\}$ 中存在有限多个区间，不妨设为 $I_1, I_2, \cdots, I_n$，使得 $I \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} I_i$.

因为 $I = \bigcup\limits_{i=1}^{n}(I \cap I_i)$，于此 $I \cap I_i$ 为区间，由初等几何易知

$$|I| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |I \cap I_i|,$$

故

$$|I| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |I \cap I_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |I_i| < m^*I + \varepsilon.$$

由于 ε 的任意性，即得

$$|I| \leqslant m^*I.$$

于是 $m^*I = |I|$.

2. 设 I 为任意区间. 作闭区间 I_1, I_2 使 $I_1 \subset I \subset I_2$ 且

$$|I_2| - \varepsilon < |I| < |I_1| + \varepsilon$$

（I_2 可取为 I 的闭包 $\overline{I}$），则

$$|I|-\varepsilon \leqslant |I_1| = m^*I_1 \leqslant m^*I \leqslant m^*I_2 = |I_2| < |I|+\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 的任意性，得

$$m^*I = |I|.$$

□

6 Lebesgue 可测集

在 5节中，我们定义了 Lebesgue 外测度，它的一个优点是任何集合都有外测度，但是外测度只具有次可数可加性，不具有可数可加性. 这意味着，如果把外测度当作测度看，使得任何集合都有测度，这是办不到的. 这启发我们思考能否对外测度 m^* 的定义域进行限制，即设法在 $\mathbb{R}^n$ 中找出一个集类 $\mathcal{M}$，使得 $\mathcal{M}$ 中的集合满足 Lebesgue 测度公理.

首先，$\mathcal{M}$ 对某些集合运算应该是封闭的. 例如对 $\mathcal{M}$ 中的集合作可数并（当然对有限并也成立，只需在后面添加可数个空集即可）、作交或作差运算后仍在 $\mathcal{M}$ 中，而且对 $\mathcal{M}$ 中一列互不相交的集合 $\{E_i\}$，应当满足可数可加性：

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*E_i.$$

其次，由 Lebesgue 的测度公理 (3)，自然应该要求 $\mathcal{M}$ 包含 $\mathbb{R}^n$ 中的所有有限开域. 又由于 $\mathbb{R}^n$ 是一列有限开区间的可列并，所以 $\mathcal{M}$ 也应该包括 $\mathbb{R}^n$.

想要从 $\mathbb{R}^n$ 中挑出集类 $\mathcal{M}$，我们只需附加一个判断 $\mathbb{R}$ 中的集合 E 属于 $\mathcal{M}$ 的条件即可. 我们试从可数可加性条件来思考.

设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 如果 $E \in \mathcal{M}$，由于 $\mathbb{R}^n$ 中任何开区间 I 都属于 $\mathcal{M}$，由 $\mathcal{M}$ 的运算封闭性，则 $I \cap E$, $I \cap E^c$ 都应该属于 $\mathcal{M}$. 但由 $(I\cap E)\cap(I\cap E^c)=\varnothing$，$I=(I\cap E)\cup(I\cap E^c)$，所以由可数可加性，应该有

$$m^*I = m^*(I\cap E) + m^*(I\cap E^c). \tag{2}$$

反之，如果存在某个开区间 I，使 2式不成立，则 E 自然不应该属于 $\mathcal{M}$. 由上可见，对于 $\mathbb{R}^n$ 中点集 E 是否属于 $\mathcal{M}$，我们可以用 2是否对 $\mathbb{R}^n$ 中任何开区间成立来判断. 事实上，我们有下列结论.

引理 1. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$，则 2式对 $\mathbb{R}^n$ 中任何开区间 I 都成立的充要条件是对 $\mathbb{R}^n$ 中的任何点集 T 都有

$$m^*T = m^*(T\cap E) + m^*(T\cap E^c). \tag{3}$$

证明. 充分性显然成立. 下证必要性. 设 T 为 $\mathbb{R}^n$ 中的任意集合，则由外测度定义，对于任何 $\varepsilon > 0$，有一列开区间 $\{I_n\}$ 使得

$$T \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, \quad 且 \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \leqslant m^*T + \varepsilon.$$

但由于

$$T \cap E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(I_i \cap E), \quad T \cap E^c \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(I_i \cap E^c),$$

故

$$m^*(T \cap E) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m^*(I_i \cap E),$$

$$m^*(T \cap E^c) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m^*(I_i \cap E^c).$$

从而

$$\begin{aligned} m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) &\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m^*(I_i \cap E) + \sum_{i=1}^{\infty} m^*(I_i \cap E^c) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} [m^*(I_i \cap E) + m^*(I_i \cap E^c)] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \leqslant m^*T + \varepsilon. \end{aligned}$$

由于 ε 的任意性，即得

$$m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) \leqslant m^*T.$$

另一方面，由 Lebesgue 外测度的次可加性，有

$$m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) \geqslant m^*T.$$

故

$$m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) = m^*T.$$

□

注. *这个引理是由 Carathéodory 给出的，通常我们称 3式为 Carathéodory 条件.*

现在，我们终于可以给出 Lebesgue 可测的定义.

定义 23 (Lebesgue 可测). 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的点集，如果对任一点集 T 都有

$$m^*T = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c),$$

则称 E 是 Lebesgue **可测的**，也称为 L **可测**. 这时 E 的 Lebesgue 外测度 m^*E 即称为 E 的 Lebesgue **测度**，记为 mE. Lebesgue 可测集全体记为 $\mathcal{M}$.

由上述定义，我们可以得出 Lebesgue 测度的若干性质.

定理 16. 集合 E 可测的充要条件是对于任意 $A \subset E$, $B \subset E^c$，总有

$$m^*(A \cup B) = m^*A + m^*B.$$

证明. 必要性　取 $T = A \cup B$，则 $T \cap E = A$, $T \cap E^c = B$，所以

$$m^*(A \cup B) = m^*T = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) = m^*A + m^*B.$$

充分性　对于任意 T，令 $A = T \cap E$，$B = T \cap E^c$，则 $A \subset E$, $B \subset E^c$ 且 $A \cup B = T$，因此

$$m^*T = m^*(A \cup B) = m^*A + m^*B = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c).$$

□

定理 17 (补集的可测性)**.** S 可测的充要条件是 S^c 可测.

证明. 事实上，对于任意的 T，

$$m^*T = m^*(T \cap S) + m^*(T \cap S^c) = m^*(T \cap (S^c)^c) + m^*(T \cap S^c).$$

□

定理 18 (并集的可测性)**.** 设 S_1, S_2 都可测，则 $S_1 \cup S_2$ 也可测，并且当 $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ 时，对于任意集合 T 总有

$$m^*\left[T \cap (S_1 \cup S_2)\right] = m^*(T \cap S_1) + m^*(T \cap S_2).$$

证明. 首先证明 $S_1 \cup S_2$ 的可测性，即证对于任意 T 总有

$$m^*T = m^*(T \cap (S_1 \cup S_2)) + m^*(T \cap (S_1 \cup S_2)^c).$$

事实上，有

$$\begin{aligned} m^*T &= m^*(T \cap S_1) + m^*(T \cap S_1^c) && (S_1 \text{ 可测}) \\ &= m^*(T \cap S_1) + m^*\left[(T \cap S_1^c) \cap S_2\right] + m^*\left[(T \cap S_1^c) \cap S_2^c\right] && (S_2 \text{ 可测}) \end{aligned}$$

由 De Morgan 公式，

$$m^*\left[(T \cap S_1^c) \cap S_2^c\right] = m^*\left[T \cap (S_1 \cup S_2)^c\right]$$

又因 S_1 可测，且 $T \cap S_1 \subset S_1$, $(T \cap S_1^c) \cap S_2 \subset S_1^c$，故由定理 16，有

$$m^*(T \cap S_1) + m^*\left[(T \cap S_1^c) \cap S_2\right] = m^*\left[T \cap (S_1 \cup (S_1^c \cap S_2))\right] = m^*\left[T \cap (S_1 \cup S_2)\right],$$

整理，即得

$$m^*T = m^*(T\cap(S_1\cup S_2)) + m^*(T\cap(S_1\cup S_2)^c).$$

其次当 $S_1\cap S_2=\varnothing$ 时，因 S_1 可测，且 $T\cap S_1\subset S_1$，$T\cap S_2\subset S_1^c$，故由定理 16，有

$$m^*\left[T\cap(S_1\cup S_2)\right] = m^*(T\cap S_1) + m^*(T\cap S_2).$$

□

推论 1 (有限并的可测性). 设 $S_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 都可测，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} S_i$ 也可测，并且当 $S_i\cap S_j=\varnothing\ (i\neq j)$ 时，对于任何集合 T 总有

$$m^*\left(T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} m^*(T\cap S_i).$$

定理 19 (交集的可测性). 设 S_1，S_2 都可测，则 $S_1\cap S_2$ 也可测.

证明. 因为 $S_1\cap S_2 = [(S_1\cap S_2)^c]^c = [S_1^c\cup S_2^c]^c$，这就转化为了补集和并集的可测性结论. □

推论 2 (有限交的可测性). 设 $S_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 都可测，则 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} S_i$ 也可测.

定理 20 (差集的可测性). 设 S_1，S_2 都可测，则 $S_1\backslash S_2$ 也可测.

证明. 因为 $S_1\backslash S_2 = S_1\cap S_2^c$，这就转化为了交集和补集的可测性结论. □

定理 21 (可数可加性). 设 $\{S_i\}$ 是一列互不相交的可测集，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} S_i$ 也可测，且

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} mS_i.$$

证明. 首先证明 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} S_i$ 的可测性. 由有限并的可测性推论，对任意 n，$\bigcup\limits_{i=1}^{n} S_i$ 可测，故对于任意 T 总有

$$\begin{aligned}
m^*T &= m^*\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right)\right] + m^*\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right)^c\right] \\
&\geqslant m^*\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right)\right] + m^*\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right)^c\right] && \text{(外测度的单调性)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} m^*(T\cap S_i) + m^*\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right)^c\right]. && \text{(有限并的可测性)}
\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$ 得

$$m^*T \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} m^*(T\cap S_i) + m^*\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right)^c\right]. \tag{4}$$

由外测度的次可数可加性，故有

$$m^*T \geqslant m^*\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i\right)\right]+m^*\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i\right)^c\right].$$

另一方面由于

$$T=\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i\right)\right]\cup\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i\right)^c\right],$$

又有

$$m^*T \leqslant m^*\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i\right)\right]+m^*\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i\right)^c\right].$$

因此

$$m^*T = m^*\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i\right)\right]+m^*\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i\right)^c\right].$$

这就证明了 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}S_i$ 的可测性. 在 4式中，令 $T=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}S_i$，这时由于 $\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}S_i\right)\cap S_i=S_i$，便得

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i\right)\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}mS_i.$$

另一方面，由外测度的次可数可加性，

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}mS_i.$$

故

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}mS_i.$$

□

推论 3 (可数并的可测性). 设 $\{S_i\}$ 是一列可测集合，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}S_i$ 也可测.

证明. 因 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}S_i$ 可表示为互不相交的集合的并：

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i=S_1\cup(S_2\backslash S_1)\cup[S_3\backslash(S_1\cup S_2)]\cup\cdots,$$

由有限并、差、可数可加性结论即得. □

推论 4 (可数交的可测性). 设 $\{S_i\}$ 是一列可测集合，则 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}S_i$ 也可测.

证明. 因 $\left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}S_i\right)^c=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}S_i^c$，应用补与可数并的结论即得. □

由上述性质的讨论，我们可知，Lebesgue 可测集对可数并、可数交以及差集余集的运算都是封闭的. 此外，定理 21表明了 Lebesgue 测度具有可数可加性，它是满足 Lebesgue 测度公理的. 下面，我们再介绍几个性质.

定理 22. 设 $\{S_i\}$ 是一列递增的可测集合

$$S_1 \subset S_2 \subset \cdots \subset S_n \subset \cdots,$$

令 $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i = \lim_{n\to\infty} S_n$，则

$$mS = \lim_{n\to\infty} mS_n.$$

证明. 因有

$$S = S_1 \cup (S_2 \backslash S_1) \cup (S_3 \backslash S_2) \cup \cdots \cup (S_n \backslash S_{n-1}) \cup \cdots,$$

其中各被并项都可测且互不相交，由 Lebesgue 测度的可数可加性，有（令 $S_0 = \varnothing$）

$$\begin{aligned} mS &= \sum_{i=1}^{\infty} m(S_i \backslash S_{i-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m(S_i \backslash S_{i-1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} m\left[\bigcup_{i=1}^{n} (S_i \backslash S_{i-1})\right] = \lim_{n\to\infty} mS_n. \end{aligned}$$

□

定理 23. 设 $\{S_i\}$ 是一列递降的可测集合

$$S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_n \supset \cdots,$$

令 $S = \bigcap_{i=1}^{\infty} S_i = \lim_{n\to\infty} S_n$，则当 $mS_1 < \infty$ 时，

$$mS = \lim_{n\to\infty} mS_n.$$

证明. 由于 S_n 可测，则可数交 S 也可测. 又因 S_n 递降，从而 $\{S_1 \backslash S_n\}$ 递增，故由定理 22有

$$\lim_{n\to\infty} m\left[S_1 \backslash S_n\right] = m\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} (S_1 \backslash S_n)\right] = m(S_1 \backslash S).$$

因 $mS_1 < \infty$ 及

$$(S_1 \backslash S_n) \cup S_n = S_1,$$

$$m(S_1 \backslash S_n) + mS_n = mS_1,$$

有

$$m(S_1 \backslash S) = \lim_{n\to\infty} m(S_1 \backslash S_n) = mS_1 - \lim_{n\to\infty} mS_n.$$

由于

$$m(S_1 \backslash S) = mS_1 - mS,$$

故

$$mS = \lim_{n\to\infty} mS_n.$$

□

注. 条件 $mS_1 < \infty$ 是必要的.

定理 24 (平移不变性)**.** 对任意实数 α，定义映射 $\tau_\alpha : x \to x+\alpha,\ x \in \mathbb{R}^n$. 则对任何集 $E \subset \mathbb{R}^n$，有 $m^*E = m^*(\tau_\alpha E)$，且当 E 为 Lebesgue 可测时，$\tau_\alpha E$ 也 Lebesgue 可测（且测度不变）.

证明. 对任何一列开域 $\{I_i\}$，$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$，同时就有 $\tau_\alpha I_i$ 亦为开域，以及 $\tau_\alpha E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(\tau_\alpha I_i)$，所以

$$m^*E = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\right\} \geqslant m^*(\tau_\alpha E).$$

但 $\tau_\alpha E$ 再平移 $\tau_{-\alpha}$ 后就是 E，所以 $m^*(\tau_\alpha E) \geqslant,^* E$. 这样就得到 $m^*E = m^*(\tau_\alpha E)$.

如果 E 为 Lebesgue 可测，那么对于任何 $T \subset \mathbb{R}^n$，有

$$m^*T = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c).$$

由于 $\tau_\alpha(T \cap E) = \tau_\alpha T \cap \tau_\alpha E,\ \tau_\alpha(T \cap E^c) = \tau_\alpha T \cap \tau_\alpha E^c$，因此从上式得到

$$m^*(\tau_\alpha T) = m^*(\tau_\alpha T \cap \tau_\alpha E) + m^*(\tau_\alpha T \cap \tau_\alpha E^c),$$

而上式中 $\tau_\alpha T$ 为任意集，因此 $\tau_\alpha E$ 为 Lebesgue 可测. □

定理说明，集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 经过平移后，它的外测度不变，对于 Lebesgue 可测集，平移后仍为 Lebesgue 可测. 这个性质称为 Lebesgue 测度的平移不变性.

用类似的方法还可以证明 Lebesgue 测度的反射不变性.

定理 25 (反射不变性)**.** 定义映射 $\tau : x \to -x,\ x \in \mathbb{R}^n$. 则对任何集 $E \subset \mathbb{R}^n$，有 $m^*E = m^*(\tau E)$，且当 E 为 Lebesgue 可测时，τE 也 Lebesgue 可测（且测度不变）.

证明不再赘述.

7 可测集类

这一节我们介绍常见的可测集.

定理 26. 1. 凡外测度为零的集皆可测，称为**零测度集**或**零测集**；

2. 零测集的任何子集仍为零测集；

3. 至多可数个零测集的并仍为零测集.

用 Lebesgue 测度的定义与简单性质即可证明，这里不再赘述.

定理 27 (区间皆可测)**.** 区间 I 都是可测集，且 $mI=|I|$.

证明. 设 I_0 是异于区间 I 的任一开区间，则

$$|I_0| = m^*(I_0\cap I) + m^*(I_0\cap I^c).$$

事实上，在 $\mathbb{R}$ 中显然，在 $\mathbb{R}^2$ 中由于 $I_0\cap I$ 为区间，而 $I_0\cap I^c$ 可以分解成至多四个不相交的区间 $I_i,\ i=1,2,3,4$，从而可证

$$m^*(I_0\cap I^c) \leqslant \sum_{i=1}^{4}|I_i|,$$

因此

$$m^*(I_0\cap I) + m^*(I_0\cap I^c) \leqslant |I_0|,$$

另一方面，反向不等式总成立，于是

$$m^*(I_0\cap I) + m^*(I_0\cap I^c) = |I_0|,$$

$\mathbb{R}^n$ 情形仿此.

由 Carathéodory 引理及 $m^*I_0=|I_0|$，对 $\mathbb{R}^n$ 中任意点集 T 都有

$$m^*T = m^*(T\cap I) + m^*(T\cap I^c).$$

从而 I 可测. □

定理 28. 凡开集、闭集皆可测.

证明. 任何非空开集可表示为至多可数个区间的并，而区间是可测的. 开集既可测，闭集作为开集的余自然也可测. □

为了进一步拓广可测集类，我们给出下面的定义.

定义 24 (σ 代数)**.** 设 Ω 是由 $\mathbb{R}^n$ 的一些子集组成的集类，如果 Ω 满足条件

1. (包含空集)$\varnothing\in\Omega$；

2. (在补集下封闭) 若 $E\in\Omega$，则 $E^c\in\Omega$；

3. (在可数并下封闭) 若 $E_n\in\Omega,\ n=1,2,\cdots$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\in\Omega$.

则称 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个 σ **代数**.

可以看出，$\mathbb{R}^n$ 中所有 Lebesgue 可测集全体组成的集类 $\mathcal{M}$ 是一个 σ 代数（称之为 Lebesgue 代数）.

定义 25 (测度)**.** 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个 σ 代数. 如果定义在 Ω 上的非负值集函数 μ 满足条件

1. $\mu(\varnothing)=0$；
2. 若 $E_n\in\Omega,\ n=1,2,\cdots$，且任意 $n\neq m,\ E_n\cap E_m=\varnothing$，有
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n),$$

则称 μ 是 Ω 上的**（正）测度**.

易见，Lebesgue 测度 m 是定义在 σ 代数上的测度.

由 σ 代数的定义易知：如果 $\{\Omega_\alpha\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一族 σ 代数，则它们的交集 $\bigcap\limits_{\alpha}\Omega_\alpha$ 也是 σ 代数.

定义 26 (集类产生的 σ 代数)**.** 设 Σ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子集类，则称所有包含 Σ 的 σ 代数的交集为 Σ 产生的 σ 代数.

由于 $\mathbb{R}^n$ 全体子集组成的子集类是包含 Σ 的 σ 代数，因此包含 Σ 的 σ 代数不是空集，并且是包含 Σ 的最小的 σ 代数.

定义 27 (Borel 代数)**.** 由 $\mathbb{R}^n$ 中全体开集组成的子集类生成的 σ 代数，记为 $\mathcal{B}$，称为 Borel **代数**，Borel 代数里的元素称为 Borel **集**.

因为开集都是 Lebesgue 可测集，因此 $\mathcal{B}\subset\mathcal{M}$，因而有以下定理.

定理 29. 凡 Borel 集都是 Lebesgue 可测集.

定义 28 (测度空间)**.** 若 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个 σ 代数，μ 是 Ω 上的测度，则称 $(\mathbb{R}^n,\Omega,\mu)$ 为**测度空间**.

例如，上述 $(\mathbb{R}^n,\mathcal{M},m)$ 和 $(\mathbb{R}^n,\mathcal{B},m)$ 都是测度空间.

定义 29. 设集合 G 可表示为一列开集 $\{G_i\}$ 的交集：
$$G=\bigcap_{i=1}^{\infty}G_i,$$
则称 G 为 G_δ 型集.

设集合 F 可表示为一列闭集 $\{F_i\}$ 的并集：
$$F=\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i,$$
则称 F 为 F_δ 型集.

显然 G_δ 型集及 F_δ 型集都是 Borel 集.

我们已经知道，$\mathcal{B}\subset\mathcal{M}$，即 Borel 集都是 Lebesgue 可测集. 但反之不成立. 我们下面将讨论 Lebesgue 可测集合类中除了 Borel 集之外，还存在什么样的集合.

定理 30. 设 E 是任一可测集，则一定存在 G_δ 型集 G，使 $G\supset E$，且 $m(G\backslash E)=0$.

证明. (1) 先证：对于任意 $\varepsilon>0$，存在开集 G，使 $G\supset E$，且 $m(G\backslash E)<\varepsilon$.

先设 $mE<\infty$，则由测度定义，有一列开区间 $\{I_i\}(i=1,2,\cdots)$，使 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}I_i\supset E$，且

$$\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|<mE+\varepsilon.$$

令 $G=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}I_i$，则 G 为开集，$G\supset E$，且

$$mE\leqslant mG\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}mI_i=\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|<mE+\varepsilon.$$

因此，$mG-mE<\varepsilon$（这里用到 $mE<\infty$），从而 $m(G\backslash E)<\varepsilon$.

其次，设 $mE=\infty$，这时 E 必为无界集，但它总可表示成可数多个互不相交的有界可测集的并，即 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n(mE_n<\infty)$，对每个 E_n 应用上面结果，可找到开集 $G_n\supset E_n$ 使 $m(G_n\backslash E_n)<\dfrac{\varepsilon}{2^n}$.

令 $G=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}G_n$，则 G 为开集，$G\supset E$，且

$$G\backslash E=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n\backslash\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}(G_n\backslash E_n),$$

$$m(G\backslash E)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m(G_n\backslash E_n)<\varepsilon.$$

(2) 依次取 $\varepsilon_n=\dfrac{1}{n},\ n=1,2,\cdots$，由上述证明，存在开集 $G_n\supset E$，使 $m(G_n\backslash E)<\dfrac{1}{n}$.

令 $G=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$，则 G 为 G_δ 型集，$G\supset E$，且

$$m(G\backslash E)\leqslant m(G_n\backslash E)<\frac{1}{n},\ n=1,2,\cdots,$$

故 $m(G\backslash E)=0$. □

定理 31. 设 E 是任一可测集，则一定存在 F_δ 型集 F，使 $F\subset E$，且 $m(E\backslash F)=0$.

证明. 因 E^c 也可测，由定理 30可知，存在 G_δ 型集 $G \supset E^c$，使 $m(G\backslash E^c) = 0$.

令 $F = G^c$，则 F 为 F_δ 型集，$F \subset E$，且

$$m(E\backslash F) = m(E\backslash G^c) = m(G\backslash E^c) = 0.$$

□

以上两个定理说明了只要有了全部 G_δ 型集或 F_δ 型集（它们只是 Borel 集的一部分）和全部 Lebesgue 零测集，就可以得到一切 Lebesgue 可测集.

定理 32 (正则性)**.** 若 E 是一可测集，则

1. $mE = \inf\{mG|G\text{是开集}, E \subset G\}$(外正则性)；
2. $mE = \sup\{mK|K\text{是紧集}, K \subset E\}$(内正则性).

证明. (1) 的证明：若 $mE = \infty$，则对任意 $G \supset E$，$mG = \infty$，因此 (1) 成立.

若 $mE < \infty$，则由定理 30的证明，对任意 $\varepsilon > 0$，存在开集 $G \supset E$, $m(G\backslash E) < \varepsilon$，因此

$$mG = m(G\backslash E) + mE < mE + \varepsilon.$$

由确界定义，(1) 成立.

(2) 的证明：若 E 有界，则存在有界闭区间 I，使得 $E \subset I$. 对任意 $\varepsilon > 0$，存在开集 $G \supset I\backslash E$，使得 $m(G\backslash(I\backslash E)) < \varepsilon$. 令 $K = I\backslash G$，则 K 是紧集，且

$$E\backslash K = E \cap G \subset G\backslash(I\backslash E),$$

故

$$m(E\backslash K) < \varepsilon.$$

于是当 E 有界时，(2) 成立.

若 E 无界，对任意 n，令

$$E_n = \{x|d(x,0) < n\} \cap E,$$

则 $\{E_n\}$ 单调可测，$\lim\limits_{n\to\infty} E_n = E$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} mE_n = mE$. 由上述证明，存在紧集 $K_n \subset E_n$，

$$mE_n - \frac{1}{n} \leqslant mK_n \leqslant mE_n, \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

由此得到

$$\lim_{n\to\infty} mK_n = mE.$$

因此无论 $mE = \infty$ 或 $mE < \infty$，(2) 成立. □