

Egorov 定理

首先定义逐点收敛、一致收敛、几乎处处收敛和近一致收敛.

定义 1 (逐点收敛). 对于定义在 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上的一列函数 $f, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$, 对每一个 $x \in D$, 对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad x \in D,$$

则称函数列 $\{f_n\}$ 在 D 上逐点收敛于 f , 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in D.$$

定义 2 (一致收敛). 对于定义在 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上的一列函数 $f, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$, 对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad x \in D,$$

则称函数列 $\{f_n\}$ 在 D 上一致收敛于 f .

上述定义在数学分析课程中已介绍, 在此回顾一下, 下面介绍测度意义下的收敛.

定义 3 (几乎处处收敛). 对于定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的一列广义实值函数 $f, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$, 若存在点集 $Z \subset E$, 满足 $m(Z) = 0$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in E \setminus Z,$$

则称函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$, 记作

$$f_n(x) \rightarrow f(x), \quad a.e. x \in E.$$

定义 4 (近一致收敛). 对于定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的一列可测函数 $f, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$, 若对 $\forall \delta > 0$, 存在可测点集 $E_\delta \subset E$, 满足 $m(E_\delta) \leq \delta$, 使得 $f_n(x)$ 在 $E \setminus E_\delta$ 上一致收敛, 则称函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上近一致收敛于 $f(x)$.

Egorov 定理指出在测度意义下, 函数列的逐点收敛与一致收敛“差不多”. 下面先给出一个引理.

引理 1. 对于定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的一列实值函数 $f, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$, 记 $\{f_n(x)\}$ 不收敛于 $f(x)$ 的点集 x 的全体组成的集合为 D , 则

$$D = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} \left\{ x : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k} \right\}.$$

证明. 对某不收敛点 x_0 , 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 对任意正整数 $N > 0$, 必存在 $n > N$, 使得

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0.$$

记 $E_{N,k} = \bigcup_{n=N}^{\infty} \left\{ x : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k} \right\}$, 则表示 $n \geq N$ 时的全体不收敛点, $\bigcap_{N=1}^{\infty} E_{N,k}$ 表示取遍 N 的全体不收敛点, 即对每个 N , 都存在不收敛点, $\bigcup_{k=1}^{\infty}$ 覆盖所有可能的 $\varepsilon > 0$, 确保包含所有不收敛点. $\square$

定理 1 (Egorov 定理). 对于定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的一列可测函数 $f, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ 几乎处处有限, $m(E) < +\infty$, 若 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$, 则 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上近一致收敛于 $f(x)$.

证明. 不妨假设这些函数在 E 上处处有限. 对任意 $\delta > 0$, 先构造 E_δ . 记 $f_n(x)$ 不收敛于 $f(x)$ 的点的全体组成的集合为 D , 则

$$m\left(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} \left\{ x : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k} \right\}\right) \leq m(D) = 0.$$

记 $E_{N,k} = \bigcup_{n=N}^{\infty} \left\{ x : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k} \right\}$, 由递减集列测度与极限的可交换性, 有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} m(E_{N,k}) = m\left(\lim_{N \rightarrow \infty} E_{N,k}\right) = 0,$$

于是存在 N_k , 使得

$$m(E_{N_k,k}) < \frac{\delta}{2^k},$$

令 $E_\delta = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{N_k,k}$, 则

$$m(E_\delta) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_{N_i,i}) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^i} = \delta.$$

下面设 $x \in E \setminus E_\delta$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 k 使 $\frac{1}{k} < \varepsilon$. 因为 $x \notin E_{N_k,k}$, 故当 $n \geq N_k$ 时有 $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k} < \varepsilon$. 所以函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $E \setminus E_\delta$ 上一致收敛于 $f(x)$. $\square$