存在和唯一性定理

定义 1 (Lipschitz 条件)**.** 设函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内满足不等式

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \leqslant L|y_1-y_2|,$$

其中常数 $L>0$，则称函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内对 y 满足 **Lipschitz 条件**. 称 L 为 Lipschitz 常数.

Lipschitz 条件是一个比通常连续更强的光滑性条件。直觉上，Lipschitz 连续函数限制了函数改变的速度，符合 Lipschitz 条件的函数的斜率，必小于一个称为 Lipschitz 常数的实数.

易知，若函数 $f(x,y)$ 在凸区域 D 内对 y 有连续的偏微商，并且 D 是有界闭区域，则 $f(x,y)$ 在 D 内对 y 满足 Lipschitz 条件；反之，结论不一定正确. 例如 $f(x,y)=|y|$ 对 y 满足 Lipschitz 条件，但当 $y=0$ 时它对 y 没有微商.

现在，我们要证明下述 Picard 定理.

定理 1 (Picard)**.** 设初值问题

$$(E):\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y), \quad y(x_0)=y_0,$$

其中 $f(x,y)$ 在矩形区域

$$R:\ [x_0-a,x_0+a]\times[y_0-b,y_0+b]$$

内连续，而且对 y 满足 Lipschitz 条件. 则 (E) 在区间 $I=[x_0-h,x_0+h]$ 上有且仅有一个解，其中常数

$$h=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\}, \quad M>\max_{(x,y)\in R}|f(x,y)|.$$

为了突出思路，我们把证明分成四步：

(1) 将微分方程转化为对应的积分方程.

(2) 构造 Picard 序列 $\{y_n(x)\}$.

(3) 证明 Picard 序列 $y_n(x)\rightrightarrows y(x)$ 是方程的解.

(4) 证明解的唯一性.

证明. (1) 先证明初值问题 (E) 有解 $y = y(x)$，等价于积分方程

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y)\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

有解 $y = y(x)$.

设 $y = y(x)$ $(x \in I)$ 是 (E) 的解，则有

$$y'(x) = f(x, y(x))\ (x \in I)$$

和

$$y(x_0) = y_0.$$

由此，对上述微分方程进行积分并利用初值条件，得到

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\,\mathrm{d}x\ (x \in I),$$

即 $y = y(x)$ 是积分方程1的解.

反之，设 $y = y(x)$ $(x \in I)$ 是积分方程1的解，则只要逆转上面的推导就可知道 $y = y(x)$ 是 (E) 的解.

因此，Picard 定理的证明等价于证明积分方程1在区间 I 上有且仅有一个解.

(2) 采用不动点的思想，用逐次迭代法构造 Picard 序列

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,\mathrm{d}t\ (x \in I,\ n = 0, 1, 2, \cdots),$$

其中 $y_0(x) = y_0$.

当 $n = 0$ 时，注意到 $f(x, y_0(x))$ 是 I 上的连续函数，所以由递推式，有

$$y_1(x) = y_0(x) + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))\,\mathrm{d}t\ (x \in I)$$

在 I 上是连续可微的，而且满足不等式

$$|y_1(x) - y_0(x)| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, y_0(t))|\,\mathrm{d}t \right| \leqslant M|x - x_0|.$$

这就是说，在区间 I 上 $|y_1(x) - y_0| \leqslant Mh \leqslant b$.

因此，$f(x, y_1(x))$ 在 I 上是连续的. 所以由递推式，有

$$y_2(x) = y_0(x) + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\,\mathrm{d}t\ (x \in I)$$

在 I 上是连续可微的，而且满足不等式

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, y_1(t))\,\mathrm{d}t| \right| \leqslant M|x - x_0|,$$

从而我们有：$|y_2(x)-y_0| \leqslant Mh \leqslant b\ (x\in I)$.

如此类推，用归纳法不难证明：由递推式给出的 Picard 序列 $\{y_n(x)\}$ 在 I 上是连续的，而且满足不等式

$$|y_n(x)-y_0| \leqslant M|x-x_0|\ (n=0,1,2,\cdots).$$

(3) 现证：Picard 序列 $\{y_n(x)\}$ 在区间 I 上一致收敛到积分方程1的解.

序列 $\{y_n(x)\}$ 的收敛性等价于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}[y_{n+1}(x)-y_n(x)]$$

的收敛性.

$$\begin{aligned}
|y_2(x)-y_1(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x}[f(t,y_1(t))-f(t,y_0(t))]\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \left|\int_{x_0}^{x}|f(t,y_1(t))-f(t,y_0(t))|\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x}|y_1(t)-y_0(t)|\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant LM\left|\int_{x_0}^{x}|t-x_0|\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \frac{LM}{2}(x-x_0)^2 = \frac{M}{L}\frac{[L(x-x_0)]^2}{2}
\end{aligned}$$

同理，可得

$$|y_{n+1}(x)-y_n(x)| \leqslant L\left|\int_{x_0}^{x}|y_n(t)-y_{n-1}(t)|\,\mathrm{d}t\right|,$$

根据归纳法，可以证明

$$|y_{n+1}(x)-y_n(x)| \leqslant \frac{M}{L}\frac{[L|x-x_0|]^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{M}{L}\frac{(Lh)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

故

$$\sum_{j=0}^{\infty}|y_{j+1}(x)-y_j(x)| \leqslant \frac{M}{L}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(Lh)^{j+1}}{(j+1)!}.$$

则根据函数项级数的 Weierstrass 判别法，可知 $\{y_n(x)\}$ 一致收敛，因此对 Picard 序列的递推式取极限，得

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\,\mathrm{d}t.$$

故 Picard 序列的极限 $y(x)$ 是方程的解.

(4) 最后证明解的唯一性. 若方程有两个互异的解 $\varphi(x), \psi(x)$，记 $u(x) = \varphi(x) - \psi(x)$，则有

$$\begin{aligned}|u(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t)) - f(t,\psi(t))\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant L\int_{x_0}^{x} |\varphi(t) - \psi(t)|\,\mathrm{d}t \\ &= L\int_{x_0}^{x} |u(t)|\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

根据 Gronwall 不等式可得

$$|u(x)| \leqslant 0,$$

故 $\varphi(x) = \psi(x)$. □

注. *若 $f(x,y)$ 不满足 Lipschitz 条件，则有 Picard 序列可能不收敛，解仍存在的情形.*

注. *f 仅连续但不满足 Lipschitz 条件时，解可能不唯一. 例如 $y' = \dfrac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$.*

也可以利用压缩映像原理来证明解的唯一性. 下面不加证明地给出该原理，可参考泛函分析相关教材.

定理 2 (压缩映像原理)**.** 设 X 是完备的度量空间，T 是 X 上的压缩映射，那么 T 有且仅有一个不动点，即 $Tx = x$ 有且只有一个解.

下面我们介绍 Osgood 条件，它是一个比 Lipschitz 条件更弱的条件.

定义 2 (Osgood 条件)**.** 设函数 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续，而且满足不等式

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant F(|y_1 - y_2|),$$

其中 $F(r) > 0$ 是 $r > 0$ 的连续函数，且

$$\int_0^{r_1} \frac{\mathrm{d}r}{F(r)} = +\infty,$$

则称 $f(x,y)$ 在 G 内对 y 满足 **Osgood 条件**.

注. *Lipschitz 条件是 Osgood 条件的特例，因为 $F(r) = Lr$ 满足上述要求.*