基本概念

定义 1 (常微分方程). 已知 $F(z_0, z_1, \cdots, z_{n+1})$ 为关于 $z_0, z_1, \cdots, z_{n+1}$ 的已知函数，则关于 $y = y(x)$ 的方程

$$F\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}\right) = 0$$

或

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

称为**常微分方程** (Ordinary Differential Equation, ODE). 称 x 为**自变量**，y 为**未知函数**，导数实际出现的最高阶数 n 称为常微分方程的**阶**.

定义 2 (线性). 若 F 关于 $z_1, \cdots, z_{n+1}$ 为线性函数，则方程为**线性的**，否则称为**非线性的**. 非线性方程中，若 F 关于 z_{n+1} 为线性函数，则方程为**拟线性的**.

注. *所有线性方程都是拟线性的，但不是拟线性的方程都是线性的，也就是说，线性是拟线性的一种特殊情形.*

定义 3 (自治). 若 $\dfrac{\partial F}{\partial z_0} \equiv 0$，则 ODE 是**自治的**.

注. *自治的方程是不含关于 x 的项的.*

例 1. 下面的方程都是常微分方程：

$$y'' = -\frac{1}{y^2}, \qquad y'' = ky, \qquad y' = \alpha y, \qquad y' = x^2 + y^2,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 1 + y^2, \qquad y'' + yy' = x, \qquad \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + a^2\theta = 0.$$

例 2. 下面的方程都不是常微分方程：

$$y'(x) = y(y(x)), \qquad y'(x) = y(x-1), \qquad \int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t + y(x) = x.$$

对未知函数的个数进行推广，得到常微分方程组：

$$\boldsymbol{F}(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}', \cdots, \boldsymbol{y}^{(n)}) = \boldsymbol{0}.$$

其中 $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, \cdots, F_m)$，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_m)$. 这里 $m \geqslant 2$，因为当 $m = 1$ 时就是 ODE 的定义. 例如 $m = 2$ 的情形，有

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, y_1', y_2', \cdots, y_1^{(n)}, y_2^{(n)}) = 0 \\ F_2(x, y_1, y_2, y_1', y_2', \cdots, y_1^{(n)}, y_2^{(n)}) = 0 \end{cases}$$

对自变量的个数进行推广，得到**偏微分方程** (Partial Differential Equation, PDE). 例如

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}+f=0$$

是一阶线性偏微分方程. 其中 x, y 和 z 为自变量，$f=f(x,y,z)$ 为未知函数.

定义 4 (解)**.** 设函数 $y=\varphi(x)$ 在区间 J 上连续，且有直到 n 阶的导数. 如果把 $y=\varphi(x)$ 及其相应的各阶导数代入 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$，得到关于 x 的恒等式，即

$$F(x,\varphi(x),\varphi(x)',\cdots,\varphi(x)^{(n)})=0$$

对一切 x 都成立，则称 $y=\varphi(x)$ 为微分方程在 J 上的一个**解**.

例 3.

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+a^2\theta=0.$$

解. 对任意的常数 C_1, C_2，

$$\theta=C_1\sin at+C_2\cos at$$

是 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个解.

微分方程的解可以包含一个或几个任意常数（与方程的阶数有关），而有的解不包含任意常数. 为了确切表达任意常数的个数，我们定义通解和特解的概念.

定义 5 (通解与特解)**.** 设 n 阶微分方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$ 的解

$$y=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$$

包含 n 个**独立的**任意常数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$，则称它为**通解**. 如果方程的解不包含任意常数，则称它为**特解**.

注. 当任意常数一旦确定之后，通解也就变成了特解.

注. 这里所说的 n 个任意常数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 是独立的，其含义是 *Jacobi* 行列式不为 0.

定解问题：我们简单介绍 Cauchy 初值条件以及边值条件.

定义 6 (Cauchy 初值条件)**.** 对于函数 y，如果它满足：

1. 它是微分方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$ 的解；
2. 它在同一点 x_0 处满足初始条件，取给定的值，即

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_1,\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}.$$

则称 y 满足 Cauchy 初值条件.

定义 7 (边值条件)**.** 边值条件是在求解微分方程时使用的一类条件，它们指定了方程解在定义域边界上的行为.

在常微分方程情况下，边值条件通常涉及以下两种类型：

1. Dirichlet 条件：直接指定了未知函数在边界上的值. 例如对于区间上的二阶 ODE，Dirichlet 条件形如
$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta,$$
这里 α, β 是给定的常数.

2. Neumann 条件：指定了未知函数在边界上的导数值. 例如对于区间上的二阶 ODE，Neumann 条件形如
$$y'(a) = \gamma, \quad y'(b) = \delta,$$
这里 γ, δ 也是给定的常数.

除此以外，还有其他类型的边值条件，如混合边值条件（同时包含函数值和导数值的条件）和周期性边值条件（对于周期函数）.

定义 8 (积分曲线)**.** 考虑一阶微分方程
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y),$$
其中 $f(x, y)$ 是平面区域 G 内的连续函数. 假设
$$y = \varphi(x) \quad (x \in I)$$
是方程的解，(其中 I 是解的存在区间)，则 $y = \varphi(x)$ 在 Oxy 平面上是一条光滑的曲线 $\mathit{\Gamma}$，称它为微分方程的**积分曲线**或**解曲线**.

由于 $y = \varphi(x)$，我们可以将微分方程改写为
$$\varphi'(x) = f(x, y),$$
亦即 $\mathit{\Gamma}$ 在其上任一点 $P_0(x_0, y_0)$ 的切线斜率为 $f(x_0, y_0)$，则切线方程为
$$y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0),$$
即使我们并不知道积分曲线 $\mathit{\Gamma} : y = \varphi(x)$ 是什么.

这样，在区域 G 内的每一点 $P(x, y)$，我们可以做一个以 $f(P)$ 为斜率的短小的直线段 $l(P)$，来标明积分曲线（如果存在）在该点的切线方向. 称 $l(P)$ 为微分方程在 P 点的**线素**，称区域 G 联同上述全体线素为微分方程的**线素场**或**方向场**.

由此可见，微分方程的任何积分曲线 $\varGamma$ 与它的线素场是吻合的，即积分曲线所到之处与线素均相切. 反之，如果一条连续可微的曲线 Λ 与微分方程的线素场吻合，则 Λ 是微分方程的一条积分曲线.

在构造方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$ 的线素场时，通常利用由关系式 $f(x,y)=k$ 确定的曲线 L_k，称它为线素场的**等斜线**. 显然，等斜线上各点线素的斜率都等于 k，因此，等斜线简化了线素场逐点构造的方法.

这里需指出，一阶微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$ 在许多情况下取如下形式：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)},$$

其中，$P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 是区域 G 内的连续函数.

当 $Q(x_0,y_0)\neq 0$ 时，方程的右端函数 $\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ 在 (x_0,y_0) 点的近旁是连续的. 因此，方程的线素场在 (x_0,y_0) 点附近是完全确定的. 然而，如果 $Q(x_0,y_0)=0$，那么线素场在 (x_0,y_0) 点就失去意义.

但是，只要 $P(x_0,y_0)\neq 0$，我们就可以把方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{Q(x,y)}{P(x,y)},$$

这里需要把 $x=x(y)$ 看作未知函数. 此时，微分方程的右端函数 $\dfrac{Q(x,y)}{P(x,y)}$ 在 (x_0,y_0) 点近旁是连续的. 因此它在那里的线素场也是确定的.

这样，当 $P(x_0,y_0)$ 和 $Q(x_0,y_0)$ 不同时为零时，我们可以在 (x_0,y_0) 近旁考虑上述两个微分方程，虽然它们的未知函数略有不同. 此时，我们可以把它们统一写成下面的对称形式：

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0.$$

只是当 $P(x_0,y_0)=Q(x_0,y_0)=0$ 时，上述的三个微分方程在 (x_0,y_0) 点都是不定式，因此线素场在 (x_0,y_0) 点没有意义. 我们称这样的点为相应微分方程的**奇异点**.

虽然在奇异点微分方程是不定式，但是在积分曲线族的分布中奇异点是关键性的点. 之后我们引入动力系统的概念，这里的奇异点将称为相应动力系统的奇点.