

对称多项式

定义 1 (齐次多项式). 设 R 是交换幺环, $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 是 R 上的 n 元多项式环. 若 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 中单项式都是 k 次的, 则称 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为 k 次齐次多项式.

齐次多项式下引入字典排序法, 则能把任一多元多项式唯一排列.

定义 2 (字典排序法). 对任意 n 元 m 次多项式 $f \in R[x_1, x_2, \dots, x_n]$. 对 $k = 0, 1, \dots, m$, 设 f_k 是 k 次齐次多项式, 则有

$$f = f_m + f_{m-1} + \dots + f_0.$$

设 $ax_1^{l_1}x_2^{l_2}\dots x_n^{l_n}$ 和 $bx_1^{t_1}x_2^{t_2}\dots x_n^{t_n}$ 是 f_k 中的两个单项式, 若有 s 使得

$$l_i = t_i, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad l_{s+1} > t_{s+1},$$

则把 $ax_1^{l_1}x_2^{l_2}\dots x_n^{l_n}$ 排在 $bx_1^{t_1}x_2^{t_2}\dots x_n^{t_n}$ 之前. 对每个齐次多项式作此排序, 称为字典排序法.

无零因子环中, 字典排序法性质如下.

性质 1. 设非零多项式 $f, g \in R[x_1, x_2, \dots, x_n]$, f 和 g 首项的积即为 f 和 g 积的首项.

推论 1. $f \neq 0, g \neq 0 \Rightarrow f \cdot g \neq 0$.

推论 2. 若 $f \neq 0$, 则 $fg = fh \Rightarrow g = h$.

性质 2. $\deg(f + g) \leq \max\{\deg f, \deg g\}$.

性质 3. $\deg(fg) = \deg f + \deg g$.

复数域上的多元多项式不再有带余除法, 但仍有整除的概念. 若存在 $f = qg$, 则称 g 整除 f , 记作 $g \mid f$, 且称 f 是 g 的倍式, g 是 f 的商式.

定义 3 (对称多项式). n 元多项式 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称为对称多项式, 若对 $1, 2, \dots, n$ 的任一排列 $i_1 i_2 \dots i_n$, 有 $f(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

定义 4 (等幂和). 齐次多项式

$$\begin{aligned} s_0 &= x_1^0 + x_2^0 + \dots + x_n^0, \\ s_1 &= x_1 + x_2 + \dots + x_n, \\ s_2 &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2, \\ &\dots\dots\dots \\ s_m &= x_1^m + x_2^m + \dots + x_n^m \end{aligned}$$

都是对称多项式, 称为等幂和或 Newton 对称幂和.

定义 5 (初等对称多项式). 齐次多项式

$$\begin{aligned} p_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \\ p_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots + x_2x_n + \cdots + x_{n-1}x_n, \\ &\dots\dots\dots \\ p_{n-1} &= \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_{n-1} \leq j_n} x_{j_1}x_{j_2} \cdots x_{j_{n-1}}, \\ p_n &= x_1x_2 \cdots x_n \end{aligned}$$

都是对称多项式, 称为**初等对称多项式**.

定理 1 (Vieta). 设复系数多项式 $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ 的 n 个根为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 则

$$a_j = (-1)^j P_j(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n).$$

证明. $f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$, 展开比较各项系数即可. □

等幂和与初等对称多项式存在关系, Newton 公式可以把初等对称多项式转化为等幂和.

命题 1. 将对称多项式分解为齐次多项式之和时, 每一齐次多项式仍是对称多项式.

命题 2. 设 $g_1, g_2, \cdots, g_k$ 都是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的对称多项式. 记 $g_1, g_2, \cdots, g_n$ 的多项式

$$F(g_1, g_2, \cdots, g_k) := f(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

则 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 仍是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的对称多项式.

注. 即对称多项式的多项式仍是对称多项式.

命题 3. 对称多项式的和、差、积仍是对称多项式.

定理 2 (对称多项式基本定理). 任一对称多项式都可表为初等对称多项式的多项式, 且表法唯一.