

环的同态与同构

定义 1 (同态与同构). 设 R_1 和 R_2 是两个环, 映射 $f: R_1 \rightarrow R_2$ 满足对任意 $a, b \in R_1$,

$$f(a+b) = f(a) + f(b), \quad f(ab) = f(a)f(b),$$

则称 f 是环 R_1 到 R_2 上的**同态映射**. 若 f 是单射, 则称**单同态**, 若 f 是满射, 则称**满同态**, 这时称 R_1 和 R_2 是**同态的**, 若 f 是双射, 则称**同构映射**, R_1 和 R_2 是**同构的**.

定义 2 (零同态). 设 f 是环 R_1 到 R_2 上的同态, 若对任意 $a \in R_1$, $f(a) = 0$, 则称 f 是 R_1 到 R_2 的**零同态**.

定义 3 (自然同态). 设 R 是环, $I \triangleleft R$, 映射 $\pi: R \rightarrow R/I$ 是同态, 称为 R 关于 I 的**自然同态**.

环的同态与同构与群的类似, 很多性质可以类推.

定义 4 (核). 设 f 是环 R_1 到 R_2 的同态, 称 $\ker f = \{a \in R_1 \mid f(a) = 0\}$ 为 f 的**核**.

注. 立即可得, 零同态 f 的核 $\ker f = R_1$.

命题 1. 设同态映射 $f: R_1 \rightarrow R_2$, 则 $\ker f$ 是 R_1 的理想.

定理 1 (环同态基本定理). 设 f 是环 R_1 到 R_2 的满同态, 则 $R_1/\ker f \cong R_2$.

证明. 由环的定义, R_1 和 R_2 对加法构成 Abel 群, 于是由群同态基本定理, 存在同构 $\varphi: R_1/\ker f \rightarrow R_2$, 对任意 $a+I, b+I \in R_1/\ker f$, 有

$$\varphi((a+I)(b+I)) = \varphi(ab+I) = f(ab) = f(a)f(b) = \varphi(a+I)\varphi(b+I),$$

于是 φ 对乘法也是同构. □

定理 2 (挖补定理). 设环 S, R' , $R' \cap S = \emptyset$, 设 $R < S$ 使得 $R \cong R'$, 则存在 $S' \cong S$, 且 $R' < S'$.

证明. 设 $\varphi: R \rightarrow R'$ 是同构映射. 令 $S' = R' \cup (S \setminus R)$, 设映射 $\phi: S \rightarrow S'$, 满足

$$\phi(x) = \begin{cases} x, & x \in S \setminus R, \\ \varphi(x), & x \in R, \end{cases}$$

容易验证 ϕ 是双射. 定义 S' 中的加法与乘法, 对任意 $x', y' \in S'$,

$$x' + y' = \phi(x + y),$$

$$x'y' = \phi(xy),$$

其中

$$x = \begin{cases} x', & x' \in S \setminus R, \\ \varphi^{-1}(x'), & x' \in R', \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} y', & y' \in S \setminus R, \\ \varphi^{-1}(y'), & y' \in R', \end{cases}$$

如此, 对任意 $x, y \in S$, 设 $x' = \phi(x)$, $y' = \phi(y)$, 则

$$x' + y' = \phi(a + b), \quad x'y' = \phi(ab)$$

若 $x \in R$, 则 $x' = \varphi(x) \in R'$, 故 $a = \varphi^{-1}(x') = x$; 若 $x \in S \setminus R$, 则 $x' = x$, 故 $a = x$. 同理 $b = y$, 于是

$$\phi(x) + \phi(y) = x' + y' = \phi(x + y),$$

$$\phi(x)\phi(y) = x'y' = \phi(xy),$$

于是 ϕ 是同构.

S' 的加法和乘法在 R' 上的限制就是 R' 的加法和乘法, 于是 $R' < S'$. □

定义 5 (群的自同态环). 设 A 是 Abel 群, A 到自身的同态映射称为**自同态**, 记 A 中自同态组成的集合为 $\text{End}A$, 定义加法

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a), \quad \forall f, g \in \text{End}A,$$

则 $\text{End}A$ 关于加法和映射的复合作成幺环, 称为群 A 的**自同态环**.

证明. 显然 $\text{id} \in \text{End}A$, 于是 $\text{End}A$ 非空. 先证 $\text{End}A$ 关于加法作成 Abel 群.

1. 封闭律: 对任意 $f, g \in \text{End}A$, $a \in A$, $(f + g)(a) = f(a) + g(a) \in A$;
2. 结合律: 对任意 $f, g, h \in \text{End}A$, $a \in A$, $((f + g) + h)(a) = (f + g)(a) + h(a) = f(a) + g(a) + h(a) = f(a) + (g + h)(a) = (f + (g + h))(a)$;
3. 零元律: 对任意 $a \in A$, 设 $\varphi(a) = 0$, 则对任意 $f \in \text{End}A$, 有 $(f + \varphi)(a) = f(a) + \varphi(a) = f(a)$, 于是 φ 是零元.
4. 逆元律: 对任意 $f \in \text{End}A$, 定义 $f^{-1} = -f$, 则 $(f + f^{-1})(a) = f(a) + f^{-1}(a) = f(a) + (-f(a)) = 0$.

再证 $\text{End}A$ 关于乘法 (映射复合) 作成半群.

1. 封闭律: 对任意 $f, g \in \text{End}A$, $a \in A$, $(fg)(a) = f(g(a)) \in A$;

2. 结合律：对任意 $f, g, h \in \text{End}A$, $a \in A$, $((fg)h)(a) = fg(h(a)) = f(g(h(a))) = f(gh(a)) = (f(gh))(a)$.

最后证 $\text{End}A$ 满足两条分配律.

1. $f(g+h)(a) = f((g+h)(a)) = f(g(a) + h(a)) = f(g(a)) + f(h(a)) = fg(a) + fh(a);$
2. $(f+g)h(a) = f(h(a)) + g(h(a)) = fh(a) + gh(a).$

□