

# 环的同态与同构

**定义 1** (同态与同构). 设  $R_1$  和  $R_2$  是两个环, 映射  $f: R_1 \rightarrow R_2$  满足对任意  $a, b \in R_1$ ,

$$f(a + b) = f(a) + f(b), \quad f(ab) = f(a)f(b),$$

则称  $f$  是环  $R_1$  到  $R_2$  上的同态映射. 若  $f$  是单射, 则称单同态, 若  $f$  是满射, 则称满同态, 这时称  $R_1$  和  $R_2$  是同态的, 若  $f$  是双射, 则称同构映射,  $R_1$  和  $R_2$  是同构的.

**定义 2** (零同态). 设  $f$  是环  $R_1$  到  $R_2$  上的同态, 若对任意  $a \in R_1$ ,  $f(a) = 0$ , 则称  $f$  是  $R_1$  到  $R_2$  的零同态.

**定义 3** (自然同态). 设  $R$  是环,  $I \triangleleft R$ , 映射  $\pi: R \rightarrow R/I$  是同态, 称为  $R$  关于  $I$  的自然同态.

环的同态与同构与群的类似, 很多性质可以类推.

**定义 4** (核). 设  $f$  是环  $R_1$  到  $R_2$  的同态, 称  $\ker f = \{a \in R_1 \mid f(a) = 0\}$  为  $f$  的核.

注. 立即可得, 零同态  $f$  的核  $\ker f = R_1$ .

**命题 1.** 设同态映射  $f: R_1 \rightarrow R_2$ , 则  $\ker f$  是  $R_1$  的理想.

**定理 1** (环同态基本定理). 设  $f$  是环  $R_1$  到  $R_2$  的满同态, 则  $R_1/\ker f \cong R_2$ .

证明. 由环的定义,  $R_1$  和  $R_2$  对加法构成 Abel 群, 于是由群同态基本定理, 存在同构  $\varphi: R_1/\ker f \rightarrow R_2$ , 对任意  $a + I, b + I \in R_1/\ker f$ , 有

$$\varphi((a + I)(b + I)) = \varphi(ab + I) = f(ab) = f(a)f(b) = \varphi(a + I)\varphi(b + I),$$

于是  $\varphi$  对乘法也是同构. □

**定理 2** (挖补定理). 设环  $S, R'$ ,  $R' \cap S = \emptyset$ , 设  $R < S$  使得  $R \cong R'$ , 则存在  $S' \cong S$ , 且  $R' < S'$ .

证明. 设  $\varphi: R \rightarrow R'$  是同构映射. 令  $S' = R' \cup (S \setminus R)$ , 设映射  $\phi: S \rightarrow S'$ , 满足

$$\phi(x) = \begin{cases} x, & x \in S \setminus R, \\ \varphi(x), & x \in R, \end{cases}$$

容易验证  $\phi$  是双射. 定义  $S'$  中的加法与乘法, 对任意  $x', y' \in S'$ ,

$$x' + y' = \phi(x + y),$$

$$x'y' = \phi(xy),$$

其中

$$x = \begin{cases} x', & x' \in S \setminus R, \\ \varphi^{-1}(x'), & x' \in R', \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} y', & y' \in S \setminus R, \\ \varphi^{-1}(y'), & y' \in R', \end{cases}$$

如此, 对任意  $x, y \in S$ , 设  $x' = \phi(x)$ ,  $y' = \phi(y)$ , 则

$$x' + y' = \phi(a + b), \quad x'y' = \phi(ab)$$

若  $x \in R$ , 则  $x' = \varphi(x) \in R'$ , 故  $a = \varphi^{-1}(x') = x$ ; 若  $x \in S \setminus R$ , 则  $x' = x$ , 故  $a = x$ . 同理  $b = y$ , 于是

$$\phi(x) + \phi(y) = x' + y' = \phi(x + y),$$

$$\phi(x)\phi(y) = x'y' = \phi(xy),$$

于是  $\phi$  是同构.

$S'$  的加法和乘法在  $R'$  上的限制就是  $R'$  的加法和乘法, 于是  $R' < S'$ .  $\square$

**定义 5** (群的自同态环). 设  $A$  是 Abel 群,  $A$  到自身的同态映射称为自同态, 记  $A$  中自同态组成的集合为  $\text{End}M$ , 定义加法

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a), \quad \forall f, g \in \text{End}M,$$

则  $\text{End}M$  关于加法和映射的复合作成幺环, 称为群  $A$  的自同态环.

证明. 显然  $\text{id} \in \text{End}A$ , 于是  $\text{End}A$  非空. 先证  $\text{End}A$  关于加法作成 Abel 群.

1. 封闭律: 对任意  $f, g \in \text{End}A$ ,  $a \in A$ ,  $(f + g)(a) = f(a) + g(a) \in A$ ;
2. 结合律: 对任意  $f, g, h \in \text{End}A$ ,  $a \in A$ ,  $((f + g) + h)(a) = (f + g)(a) + h(a) = f(a) + g(a) + h(a) = f(a) + (g + h)(a) = (f + (g + h))(a)$ ;
3. 零元律: 对任意  $a \in A$ , 设  $\varphi(a) = 0$ , 则对任意  $f \in \text{End}A$ , 有  $(f + \varphi)(a) = f(a) + \varphi(a) = f(a)$ , 于是  $\varphi$  是零元.
4. 逆元律: 对任意  $f \in \text{End}A$ , 定义  $f^{-1} = -f$ , 则  $(f + f^{-1})(a) = f(a) + f^{-1}(a) = f(a) + (-f(a)) = 0$ .

再证  $\text{End}A$  关于乘法 (映射复合) 作成半群.

1. 封闭律: 对任意  $f, g \in \text{End}A$ ,  $a \in A$ ,  $(fg)(a) = f(g(a)) \in A$ ;

2. 结合律: 对任意  $f, g, h \in \text{End}A$ ,  $a \in A$ ,  $((fg)h)(a) = fg(h(a)) = f(g(h(a))) = f(gh(a)) = (f(gh))(a)$ .

最后证  $\text{End}A$  满足两条分配律.

$$1. f(g+h)(a) = f((g+h)(a)) = f(g(a) + h(a)) = f(g(a)) + f(h(a)) = fg(a) + fh(a);$$

$$2. (f+g)h(a) = f(h(a)) + g(h(a)) = fh(a) + gh(a).$$

□