主理想整环上的有限生成模

以下总假设 D 是主理想整环.

1 自由模的子模

约定用"$r(M)$"表示自由模 M 的秩数. 一般环上的自由模的子模不一定仍是自由模，举例如下.

例 1. $\mathbb{Z}_6$-模 $\mathbb{Z}_6$ 是自由模，而 $\langle\overline{2}\rangle=\mathbb{Z}\cdot\overline{2}=\left\{\overline{0},\overline{2},\overline{4}\right\}$ 是 $\mathbb{Z}_6$ 的一个子模，但不是自由模.

证明. 若 $\langle\overline{2}\rangle$ 是零秩自由模，则只有一个零元素，于是它不是零秩的；

若 $\langle\overline{2}\rangle$ 是秩大于零的自由模，则存在一个基，但对 $\overline{3}\in\mathbb{Z}_6$ 作为系数环中的非零元素，它与 $\overline{0},\overline{2},\overline{4}$ 的乘积均为零，于是 $\langle 2\rangle$ 不是自由模. □

定理 1. 设 M 是自由 D-模，则 M 的任意子模 N 也是自由 D 模，且 $r(N)\leqslant r(M)$.

证明. 对 $r(M)$ 用归纳法. 当 $r(M)=0$ 时，M 中只有零元，任意模 $N\subset M=\{0\}$，于是 $N=\{0\}$，N 为零秩自由模，且 $r(N)=r(M)=0$，命题成立.

假设 $r(M)=n-1$ 时命题成立，下证 $r(M)=n$ 时命题也成立.

记 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 为 M 的一组基，令

$$I_1=\left\{a_1\in D\mid\sum_{i=1}^{n}a_ie_i\in N\right\},$$

对任意 $a_1,a_1'\in I_1$，有 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_ie_i\in N$，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i'e_i\in N$，于是

$$\sum_{i=1}^{n}a_ie_i-\sum_{i=1}^{n}a_i'e_i=\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_i')e_i\in N,$$

于是 $a_1-a_1'\in I_1$. 对任意 $r\in D$，$a_1\in I_1$，有

$$r\sum_{i=1}^{n}a_ie_i=\sum_{i=1}^{n}(ra_i)e_i\in N,$$

于是 $ra_1\in I$. 由理想的充要条件，$I_1\lhd D$.

设 $I_1=\langle d_1\rangle$，若 $d_1=0$，则 $N\subset\langle e_2,e_3,\cdots,e_n\rangle$，记 $M'=\langle e_2,e_3,\cdots,e_n\rangle$ 是秩为 $n-1$ 的自由模，于是由归纳假设，$r(N)\leqslant r(M')<r(M)$.

若 $d_1 \neq 0$，定义 $f = \sum_{i=1}^{n} d_i e_i$. 则 $e_2, e_3, \cdots, e_n$ 无法生成 f，$f \notin M'$. 下面证明 $N = Df \oplus (N \cap M')$.

由于 $Df \subset N$，$M \cap M' \subset N$，于是 $Df \oplus (N \cap M') \subset N$.

对任意 $g = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \in N$，$a_1 \in I_1 = \langle d_1 \rangle$，于是存在 $a_1' \in D$ 使得 $a_1 = a_1' d_1$，于是

$$g - a_1' f = \sum_{i=2}^{n} (a_i - a_1' d_i) e_i \in M',$$

由于 $g \in N$，$a_1' f \in N$，于是 $g - a_1' f \in N \cap M'$，故 $N \subset Df + (N \cap M')$.

对任意 $lf \in Df \cap (N \cap M') \subset M'$，$lf = l \sum_{i=1}^{n} d_i e_i \subset M'$，于是 $l d_1 e_1 = 0$. 而 e_1 是线性无关的元素，$d_1 \neq 0$ 且 D 无零因子，于是 $l = 0$，即 $Df \cap (N \cap M') = \{0\}$，于是有 $N = Df \oplus (N \cap M')$.

又 f 是线性无关的，故 Df 是 1 秩自由模. 由 $N \cap M' \subset M'$，由归纳假设知 $N \cap M'$ 是自由 D-模，且 $r(N \cap M') \leqslant n - 1$. 再据自由模的直和仍为自由模，且直和的秩为秩的和，于是 N 为自由 D-模，且 $r(N) = r(Df) + r(N \cap M') \leqslant 1 + n - 1 = n$. □

一般环上有限生成模的子模也不一定的有限生成模，类似地，有以下定理.

定理 2. 设 M 是有限生成 D-模，则 M 的子模也是有限生成 D-模.

证明. 设 N 是 M 的任一子模. 由于 M 是有限生成 D-模，于是存在 $g_1, g_2, \cdots, g_n$ 使得 $M = \langle g_1, g_2, \cdots, g_n \rangle$. 对 $D^{(n)}$ 的一组基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$，取 $g_1, g_2, \cdots, g_n \in M$，可以由自由模的充要条件建立模同态 $\varphi : D^{(n)} \to M$ 满足 $\varphi(e_i) = g_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. 又 $g_1, g_2, \cdots, g_n$ 是 M 的生成组，于是对任意 $x = \sum_{i=1}^{n} d_i g_i \in M$, $d_i \in D$，有

$$\varphi(\sum_{i=1}^{n} d_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} d_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} d_i g_i = x,$$

于是 φ 是满同态.

令 $K = \varphi^{-1}(N)$，即 N 的完全原像，则由模的同态定理，K 是 $D^{(n)}$ 的子模. 由定理1，K 是自由模，且 $r(k) \leqslant n$. 取 K 的一组基 $f_1, f_2, \cdots, f_{r(k)}$，则 $\varphi(f_1), \varphi(f_2), \cdots, \varphi(f_{r(k)})$ 是 N 的一组生成元，于是 N 是有限生成的. □

2 PID 上有限生成模的结构

定义 1 (扭元与自由元). 设 M 是 R-模，$x \in M$ 若有非零的 $a \in R$ 使得 $ax = 0$，则称 x 是 M 的**扭元或挠元**，否则称 x 为 M 的**自由元或无关元**.

定义 2 (扭模与无扭模)**.** 若 R-模 M 的每个元素都是扭元，则称 M 是 R 上的**扭模**或**挠模**；若 M 的每个非零元都是自由元，则称 M 是 R 上的**无扭模**或**无挠模**.

注. *1. 扭元即线性相关元，自由元即线性无关元.*

2. 扭元与系数环有关.

3. 零元一定是扭元.

4. 若 x 是自由元，则 Rx 是一秩自由模.

5. 若 M 是 R 上的无扭模，$x \in M$，$a \in R$ 且 $a \neq 0$，则 $ax = 0 \iff x = 0$.

定义 3 (零化子)**.** 设 M 是 R-模，$x \in M$，称 $\mathrm{ann} = \{a \in R \mid ax = 0\}$ 为 x 的**零化子**.

命题 1. 整环 R 上的自由模 M 一定是无扭模.

证明. 对任意 $x \in M$，$x \neq 0$，设 $r(M) = n$，则 $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \neq 0$，$x_i \in R$，则存在 i 使 $x_i \neq 0$. 对任意非零的 $a \in R$，$ax = \sum_{i=1}^{n} a x_i e_i$，由于 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 线性无关，$x_i \neq 0$，且 R 中无零因子，于是 $a x_i e_i \neq 0$，于是 $ax \neq 0$. 因而 x 是 M 中的自由元，故 M 是 R 上的无扭模. □

但反过来一般是不成立的，反例如下.

例 2. 有理数加群 $\mathbb{Q}$ 作为 $\mathbb{Z}$-模是无扭模，但不是自由模.

证明. 对任意 $m \in \mathbb{Z}$，非零元 $x \in \mathbb{Q}$，$mx = 0 \iff m = 0$，于是 $\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{Z}$ 上的无扭模. 对任意 $\dfrac{p_1}{q_1}, \dfrac{p_2}{q_2} \in \mathbb{Q}$，这里 $(p_i, q_i) = 1$，有 $p_2 q_1, -p_1 q_2 \in \mathbb{Z}$ 使得

$$p_2 q_1 \frac{p_1}{q_1} - p_1 q_2 \frac{p_2}{q_2} = 0,$$

于是 $\dfrac{p_1}{q_1}, \dfrac{p_2}{q_2}$ 线性相关. 若 $\mathbb{Q}$ 是自由 $\mathbb{Z}$-模，则 $r(\mathbb{Q}) = 0$ 或 1. 又 $\mathbb{Q}$ 有非零元，于是 $r(Q) = 1$.
设 $\mathbb{Q}$ 的基为 $\dfrac{p}{q}$，这里 $(p, q) = 1$，则 $\dfrac{1}{2q}$ 不能被 $\dfrac{p}{q}$ 表出，于是 $\mathbb{Q}$ 不是自由模. □

不禁会想，对系数环 R 和模 M 加一些什么限制条件才能满足无扭模是自由模.

定义 4 (极大线性无关组)**.** 对有限生成 R-模 M，设 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 是 M 的生成元，则存在子集 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 满足以下条件：

1. $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 线性无关，即 $\sum_{i=1}^{r} a_i x_i = 0 \iff a_i = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant r$;

2. 对任意 $j \geqslant r$ 且 $j \leqslant m$,有 $x_1, x_2, \cdots, x_r, x_j$ 线性相关,即存在不全为零的 $a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{rj}, a_j \in R$ 使得
$$\sum_{i=1}^{r} a_{ij}x_i + a_jx_j = 0,$$

则称 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 是 $x_1, x_2,]\cdots, x_m$ 中的**极大线性无关组**.

注. *只要 M 不是零模，就存在非零元作为无关元，于是存在极大线性无关组.*

定理 3. 设 M 是 D 上有限生成的无扭模，则 M 是自由 D-模.

证明. M 是零模时平凡成立. M 不是零模时，设 $M = \langle x_1, x_2, \cdots, x_m \rangle$，则存在极大线性无关组 $x_1, x_2, \cdots, x_r$，设 $N = \langle x_1, x_2, \cdots, x_r \rangle = Dx_1 \oplus Dx_2 \oplus \cdots \oplus Dx_r$. 而 Dx_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ 是一秩自由模，于是 N 为秩 r 的自由模.

对任意 $j \leqslant r$，由极大线性无关组的定义，存在不全为零的 $a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{ij}, a_j \in D$ 使得
$$\sum_{i=1}^{r} a_{ij}x_i + a_jx_j = 0,$$

则对任意 $r+1 \leqslant j \leqslant m$，有 $a_j \neq 0$，否则与 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 线性无关矛盾.

令 $a = a_{r+1}a_{r+2}\cdots a_m$，设 $\eta : M \to M, x \mapsto ax$，容易验证 η 是模同态，于是 $\eta(M)$ 是 D-模. 由模同态基本定理，有
$$M/\ker\eta \cong \eta(M),$$

而 $\ker\eta = \{x \in M \mid ax = 0\}$，由于 $a \neq 0$，于是 $\ker f = \{0\}$. 代入，有 $M \cong \eta(M)$.

下证 $\eta(M)$ 是 N 的子模. 当 $1 \leqslant i \leqslant r$ 时，
$$\eta(x_i) = ax_i \in N.$$

当 $r+1 \leqslant j \leqslant m$ 时，
$$\eta(x_j) = ax_j = \left(\prod_{k\neq j} a_k\right) a_jx_j = -\left(\prod_{k\neq j} a_k\right)\sum_{i=1}^{r} a_{ij}x_i \in N,$$

于是 $\eta(M)$ 是 N 的子模，再由定理1可得 $\eta(M)$ 是自由模，于是 M 为自由模. □

定理 4. 设 R 是整环，M 是 R 上的模，记 M 中扭元组成的集合为
$$\mathrm{Tor}M = \{x \in M \mid \exists a \neq 0 \ s.t.\ ax = 0\} = \{x \in M \mid \mathrm{ann}x \neq \{0\}\},$$

则 $\mathrm{Tor}M$ 是 M 的子模，且商模 $M/\mathrm{Tor}M$ 是无扭模.

证明. 对任意 $x, y \in \mathrm{Tor}$，设 $a, b \in R$ 使得 $ax = by = 0$. 则

$$ab(x-y) = b(ax) - a(by) = 0,$$

$ab \in R$，于是 $x - y \in \mathrm{Tor}M$. 由子群的充要条件，$\mathrm{Tor}M$ 是 M 的子群. 对任意 $a \in R$，$x \in \mathrm{Tor}M$，存在 $c \in R$ 使得 $cx = 0$，

$$c(ax) = a(cx) = 0,$$

于是 $ax \in \mathrm{Tor}M$. 由子模的定义可知 $\mathrm{Tor}M$ 是 M 的子模.

记 $\overline{M} = M/\mathrm{Tor}M$. 对任意 $\overline{x} \in \mathrm{Tor}\overline{M}$，存在 $a \in R$ 且 $a \neq 0$ 使得 $a\overline{x} = \overline{0} = 0 + \mathrm{Tor}M = \mathrm{Tor}M$. 于是 $ax \in \mathrm{Tor}M$，存在 $b \in R$ 且 $b \neq 0$ 使得 $b(ax) = bax = 0$. 又 R 是整环，无零因子，$a \neq 0, b \neq 0$，于是 $ab \neq 0$，则 $x \in \mathrm{Tor}M$，有 $\overline{x} = \mathrm{Tor}M = \overline{0}$. 于是 $\mathrm{Tor}\overline{M} = \{\overline{0}\}$，即 $M/\mathrm{Tor}M$ 是无扭模. □

定理 5. 设 M 是 D 上的有限生成模，则存在 M 自由子模 N，使得

$$M = \mathrm{Tor}M \oplus N$$

且 N 在同构意义下是唯一的.

证明. 设 M 的生成元为 $x_1, x_2, \cdots, x_m$. 记 $\overline{M} = M/\mathrm{Tor}M$，$\overline{x_i} = x_i + \mathrm{Tor}M$，则 $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \cdots, \overline{x_m}$ 是 $\overline{M}$ 的一组生成元. 由定理4，$\overline{M}$ 是无扭模，由定理3，$\overline{M}$ 是自由 D-模.

设 $\pi : M \to \overline{M}$ 为自然映射，并设 $\pi(e_1), \pi(e_2), \cdots, \pi(e_r)$ 是 $\overline{M}$ 的一组基. 则对任意 $\overline{x} \in \overline{M}$，存在 $a_i \in R$ 使得

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{r} a_i \pi(e_i).$$

设 $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} a_i e_i = 0$，则

$$\pi\left(\sum_{i=1}^{r} a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{r} a_i \pi(e_i) = \overline{0}.$$

而 $\pi(e_1), \pi(e_2), \cdots, \pi(e_r)$ 线性无关，于是 $a_1 = a_2 = \cdots = a_r = 0$. 因而 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 线性无关. 记 $N = \langle e_1, e_2, \cdots, e_r \rangle$ 是 M 的 r 秩自由子模，下证 $M = \mathrm{Tor}M \oplus N$.

由于 $\mathrm{Tor}M \subset M$，$N \subset M$，于是 $N + \mathrm{Tor}M \subset M$.

对任意 $x \in M$，$\overline{x} = \pi(x) \in M/\mathrm{Tor}M$，存在 $b_j \in D$ 使得

$$x + \mathrm{Tor}M = \overline{x} = \sum_{j=1}^{r} b_j \pi(e_j) = \sum_{j=1}^{r} b_j (e_j + \mathrm{Tor}M) = \sum_{j=1}^{r} b_j e_j + \mathrm{Tor}M,$$

于是 $x-\sum_{j=1}^{r} b_j e_j \in \mathrm{Tor}M$，记 $y=x-\sum_{j=1}^{r} b_j e_j$. 则

$$x=y+\sum_{j=1}^{r} b_j e_j \in \mathrm{Tor}M+N.$$

对任意 $z\in\mathrm{Tor}M\cap N$，$z\in\mathrm{Tor}M$，于是 z 是扭元；N 是主理想整环上的自由模，于是 N 是无扭模，扭元只有 0，而 $z\in N$，于是 $z=0$，即 $\mathrm{Tor}M\cap N=\{0\}$. 因此 $M=\mathrm{Tor}M\oplus N$.

可以证明 $N\cong M/\mathrm{Tor}M$，于是 N 的秩可以由 $M/\mathrm{Tor}M$ 确定，其中 $\mathrm{Tor}M$ 又可以由 M 确定，于是 N 的秩可以由 M 确定，因此在同构意义下 N 是唯一确定的. □

3 PID 上有限生成扭模的分解

前面已经把 PID 上的有限生成模分解成了一个自由模 N 与一个扭模 $\mathrm{Tor}M$. 对于自由模，结构是清晰的，下面研究扭模 $\mathrm{Tor}M$ 的分解. 由于 $\mathrm{Tor}M$ 是 M 的子模，由定理2可知 $\mathrm{Tor}M$ 也是有限生成的，于是讨论有限生成扭模的分解.

定义 5. 设 R 是交换幺环，定义 $M(a)=\{x\in M\mid ax=0\}$，则 $M(a)$ 是 M 的子模.

证明. 对任意 $x,y\in M(a)$，$c\in R$，有

1. $a(x-y)=ax-ay=0$;
2. $a(cx)=c(ax)=0$,

于是 $x-y\in M(a)$，$cx\in M(a)$，故 $M(a)$ 是 M 的子模. □

性质 1. 设 M 是 D 上的有限生成扭模，则

1. $M(0)=M$. 若 a 可逆，则 $M(a)=\{0\}$;
2. 若 $a\mid b$，则 $M(a)\subset M(b)$; 若 $a\sim b$，则 $M(a)=M(b)$.
3. 若 $a,b\in D$，则 $M(a)\cap M(b)=M(\gcd(a,b))$;
4. 若 $(a,b)=1$，则 $M(ab)=M(a)\oplus M(b)$.

证明. 1. 对任意 $x\in M$，都有 $0x=x$，于是 $M(0)=M$. 若 a 可逆，对 $x\in M(a)$，有 $x=1x=a^{-1}ax=0$，于是 $M(a)=\{0\}$.

2. 若 $a\mid b$，则存在 $c\in D$ 使得 $b=ca$，对任意 $x\in M(a)$，有 $bx=c(ax)=0$，于是 $x\in M(b)$，故 $M(a)\subset M(b)$. 若 $a\sim b$，则 $a\mid b$ 且 $b\mid a$，故有 $M(a)=M(b)$.

3. $(a,b) \mid a$ 且 $(a,b) \mid b$，于是 $M((a,b)) \subset M(a) \cap M(b)$. 又 D 是 PID，于是存在 $u, v \in D$ 使得

$$(a,b) = ua + vb,$$

对任意 $x \in M(a) \cap M(b)$，有 $ax = bx = 0$，于是

$$(a,b)x = (ua+vb)x = uax + vbx = 0,$$

则 $x \in M((a,b))$，故 $M(a) \cap M(b) = M((a,b))$.

4. $M(a) \cap M(b) = M((a,b)) = M(1) = \{0\}$. 又 $a \mid ab$，$b \mid ab$，于是 $M(a) \subset M(ab)$，$M(b) \subset M(ab)$. 由于 $M(ab)$ 是模，对 $x \in M(a) \subset M(ab)$，$y \in M(b) \subset M(ab)$，有 $x + y \in M(ab)$，于是 $M(a) + M(b) \subset M(ab)$.

由 $(a,b) = 1$，存在 $u, v \in D$ 使得 $ua + vb = 1$. 对任意 $x \in M(ab)$，$x = 1x = uax + vbx$. 而 $b(uax) = uabx = 0$，$a(vbx) = vabx = 0$，于是 $uax \in M(b)$，$vbx \in M(a)$，$x \in M(a) + M(b)$，于是 $M(ab) \subset M(a) + M(b)$. 因此 $M(ab) = M(a) \oplus M(b)$. □

定理 6. 设 M 是 D 上的有限生成扭模，$a \in D^* \backslash U$ 有素因式分解 $a = up_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r}$. 其中 u 是 D 中的单位，$p_1, p_2, \cdots, p_r$ 是互不相伴的素元素，则

$$M(a) = M(p_1^{n_1}) \oplus M(p_2^{n_2}) \oplus \cdots \oplus M(p_r^{n_r}).$$

证明. 当 $r = 1$ 时，$a = up_1^{n_1}$，则 $a \sim p_1^{n_1}$. 于是 $M(a) = M(p_1^{n_1})$.

假设 $r - 1$ 时成立，则

$$M(a) = M(p_1^{n_1}) \oplus M(p_2^{n_2}) \oplus \cdots \oplus M(p_{r-1}^{n_{r-1}}) = \bigoplus_{i=1}^{r-1} M(p_i^{n_i}),$$

当 r 时，有 $a = up_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_{r-1}^{n_{r-1}} \cdot p_r^{n_r}$，于是

$$M(a) = \bigoplus_{i=1}^{r-1} M(p_i^{n_i}) \oplus M(p_r^{n_r}) = \bigoplus_{i=1}^{r} M(p_i^{n_i}).$$

□

定义 6 (p-分支)**.** 设 M 是 D 模，p 是 D 的素元素，则称

$$M_p = \bigcup_{i=1}^{\infty} M(p^i) = \left\{ x \in M \mid \exists k \ s.t. \ p^k x = 0 \right\}$$

为 M 的 ***p*-分支**. 又若 $M = M_p$，则称 M 是 ***p*-模**.

性质 2. $M(p) \subset M(p^2) \subset \cdots \subset M(p^k) \subset \cdots$.

性质 3. M_p 是 M 的子模.

性质 4. p-模的子模和商模仍是 p-模.

证明. 设 M 是 p-模，N 是 M 的子模，则对任意 $x \in N \subset M$，存在 i 使得 $p^i x = 0$，于是 N 也是 p-模.

对任意 $x + N \in M/N$，存在 i 使得 $p^i x = 0$，于是有 $p^i(x+N) = p^i x + N = 0 + N = N$，于是 M/N 也是 p-模. □

定义 7 (模的零化子)**.** 设 M 是幺环 R 上的模，则称

$$\mathrm{ann}M = \{a \in R \mid ax = 0,\ \forall x \in M\}$$

为 M 的**零化子**.

性质 5. $\mathrm{ann}M = \bigcap\limits_{x \in M} \mathrm{ann}x$.

性质 6. $\mathrm{ann}M$ 是 R 的理想.

性质 7. 若 N_1, N_2 是 M 的子模且 $N_1 \subset N_2$，则 $\mathrm{ann}N_2 \subset \mathrm{ann}N_1$.

性质 8. 若 R 是交换环，对任意 $x_0 \in M$ 有 $\mathrm{ann}x_0 = \mathrm{ann}Rx_0$.

引理 1. 设 M 是 D 上的扭模，则

1. 对任意 $x \in M$，存在 $a_x \in D$ 使得 $\mathrm{ann}x = \langle a_x \rangle$，且 a_x 由 x 在相伴意义下唯一确定. 又存在 M，使得 $\mathrm{ann}M = \langle a_M \rangle$，$a_M$ 由 M 在相伴意义下唯一确定，且 a_M 是 $\{a_x \mid x \in M\}$ 的最小公倍式.

2. $M = M(a_M)$.

3. 若 $M \neq \{0\}$ 且 $M = \langle x_1, x_2, \cdots, x_r \rangle$，则 $a_M = [a_{x_1}, a_{x_2}, \cdots, a_{ax_r}]$ 且 $\mathrm{ann}M$ 是 D 的非平凡理想.

证明. 1. 由于 D 是 PID，$\mathrm{ann}x$ 是 D 的理想，于是存在 a_x 使得 $\mathrm{ann}x = \langle a_x \rangle$. 由 PID 的性质，对任意 $\langle a_x \rangle = \langle a_x' \rangle$，有 $a_x \sim a_x'$，于是 a_x 由 x 在相伴意义下唯一确定. 对后者的结论同理可得. 由于 $\mathrm{ann}M = \bigcap\limits_{x \in M} \mathrm{ann}x$，则 a_M 是 $\{a_x \mid x \in M\}$ 的公倍式，对任意公倍式 c，有

$$c \in \bigcap_{x \in M} \mathrm{ann}x = \mathrm{ann}M = \langle a_M \rangle,$$

于是 $a_M \mid c$，则 a_M 是 $\{a_x \mid x \in M\}$ 的最小公倍式.

2. $M(a_M) = \{x \in M \mid a_M x = 0\}$，于是 $M(a_M) \subset M$. 对任意 $x \in M$，存在 $a_M \in \mathrm{ann}M$ 使得 $a_M x = 0$，于是 $M \subset M(a_M)$.

3. 由 1 知，M 是 $a_{x_1}, a_{x_2}, \cdots, a_{x_r}$ 的公倍式. 对任意公倍式 c，因为 $a_{x_i}x_i = 0$，于是有 $cx_i = 0$. 对任意 $x = \sum_{i=1}^{r} b_i x_i$，$b_i \in D$，$1 \leqslant i \leqslant r$，有

$$cx = c\sum_{i=1}^{r} b_i x_i = \sum_{i=1}^{r} b_i c x_i = 0,$$

于是 $c \in \mathrm{ann}M = \langle a_M \rangle$，故 $a_M \mid c$.

因为 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 是扭元，于是 $a_{x_1}, a_{x_2}, \cdots, a_{x_r}$ 是非零的，最小公倍式 $a_M \neq 0$，$\langle a_M \rangle \neq \{0\}$. 反设 $\langle a_M \rangle = D$，则 $1 \in \langle a_M \rangle$，存在 a_M^{-1} 使得 $a_M^{-1} a_M = 1$. 由结论 2 和性质1的结论 1，有 $M = M(a_M) = \{0\}$，这与 $M \neq \{0\}$ 矛盾. 故 $\mathrm{ann}M$ 是 D 的非平凡理想. □

注. *结论 1 中的 $\{a_x \mid x \in M\}$ 中可能有无限个元素，也可以定义最小公倍式. 结论 2 中，a_M 把 M 中所有元素都化零，而 $M(a_M)$ 是 M 中所有在 a_M 下化零的元素，所以 M 中的所有元素都在 $M(a_M)$ 中.*

定理 7. 设 M 是 D 上的有限生成扭模，且 $\mathrm{ann}M = \langle a_M \rangle$，$a_M = up_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r}$ 是标准分解式，则

1. 设 p 是 M 中一个素元素，则

$$M_p = \begin{cases} M(p_i^{n_i}), & \exists i, p \sim p_i, \\ \{0\}, & \forall i, p \nsim p_i. \end{cases}$$

2. $M = \bigoplus_{i=1}^{r} M_{p_i}$.

注. *“$a_M = up_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r}$ 是标准分解式”即：u 是单位，p_i 之间互不相伴.*

证明. 1. 若对任意 $1 \leqslant i \leqslant r$，$p \nsim p_i$，则 $(p, a_M) = 1$，于是 $(p^k, a_M) = 1$.

$$M(p^k) = M(p^k) \cap M = M(p^k) \cap M(a_M) = M((p^k, a_M)) = M(1) = \{0\}.$$

于是 $M_p = \bigcup_{k=1}^{\infty} M(p^k) = \{0\}$.

若存在 i 使得 $p \sim p_i$，则

$$M_p = \bigcup_{k=1}^{\infty} M(p^k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} M(p_i^k) = M_{p_i}.$$

仅考虑当 $k > n_i$ 时即可. 此时

$$M(p_i^k) = M(p_i^k) \cap M = M(p_i^k) \cap M(a_M) = M((p_i^k, a_M)) = M(p_i^{n_i}),$$

于是 $M_p = M_{p_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} M(p_i^k) = M(p_i^{n_i})$.

2. $M = M(a_M) = M(up_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_r^{n_r}) = \bigoplus_{i=1}^{r} M(p_i^{n_i}) = \bigoplus_{i=1}^{r} M_{p_i}$. □

推论 1. 设 N 是 M 的子模，则

$$N = \bigoplus_{i=1}^{r} N_{p_i}, \quad N_{p_i} = N \cap M_{p_i}.$$

证明. 设 $\mathrm{ann}N = \langle b \rangle$，由 $N \subset M$ 有 $\mathrm{ann}M \subset \mathrm{ann}N$，于是 $b \mid a_M$. 于是

$$b = u_1 p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}, \quad 0 \leqslant k_i \leqslant n_i,$$

于是 $N = N(u_1 p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}) = \bigoplus_{i=1}^{r} N(p_i^{k_i}) = \bigoplus_{i=1}^{r} N_{p_i}$.

$$N \cap M_{p_i} = N \cap \left\{ x \in M \mid \exists k \ s.t.\ p^k x = 0 \right\} = \left\{ x \in N \mid \exists k \ s.t.\ p^k x = 0 \right\} = N_{p_i}.$$

□

4 PID 上有限生成 $\boldsymbol{p}$-模的分解

引理 2. 设 M 是 D 上的 n 秩自由模，N 是 M 的子模，M/N 是 p-模. 则存在 M 的一组基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 及一组非负整数 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 使得 $\{p_1^{m_1}e_1, p_2^{m_2}e_2, \cdots, p_n^{m_n}e_n\}$ 是 N 的一组基.

证明. 对 n 用归纳法.

当 $n = 1$ 时，设 M 的基为 $\{e\}$，M/N 是 $\overline{e} = e + N$ 生成的 D 上的 p-模. 于是存在 $k \geqslant 0$ 使 $\mathrm{ann}\overline{e} = \langle p^k \rangle$，下证 $\{p^k e\}$ 是 N 的基.

因 $p^k \overline{e} = \overline{0}$，即 $p^k(e + N) = p^k e + N = 0 + N = N$，于是 $p^k e \in N$.

设任意 $d \in D$ 使得 $d(p^k e) = (dp^k)e = 0$，有 $dp^k = 0$，而 $p^k \neq 0$，D 是 PID，于是 $d = 0$. 所以 $p^k e$ 是线性无关元.

对任意 $ae \in N$，$a\overline{e} = a(e + N) = ae + N = \overline{ae} = \overline{0}$，所以 $a \in \mathrm{ann}\overline{e} = \langle p^k \rangle$，于是 $p^k \mid a$. 存在 $a' \in D$ 使得 $a = a'p^k$，于是对任意 $ae \in N$，有 $ae = a'(p^k e)$. 所以 $p^k e$ 是 N 的生成组. 综上所述，$\{p^k e\}$ 是 N 的一组基.

下设秩为 $n - 1$ 时成立，去证秩为 n 时也成立.

设 M 的一组基为 $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$，记

$$I_i = \left\{ a_i \in D \mid \sum_{j=1}^{n} a_j f_j \in N \right\},$$

则可证 I_i 是 D 的理想，于是存在 $c_i \in D$ 使得 $I_i = \langle c_i \rangle$.

因为存在 n_i 使 $p^{n_i}\overline{f} = \overline{0}$，即 $p^{n_i}(f_i + N) = p^{n_i} f_i + N = 0 + N = N$，于是 $p^{n_i} f_i \in N$. 由 I_1 的定义可得 $p^{n_i} \in I_1 = \langle c_i \rangle$，于是 $c_i \mid p^{n_i}$. 由于 p 是素元素，于是存在 $l_i \leqslant n_i$ 使得 $c_i \sim p^{l_i}$，故 $\langle c_i \rangle = \langle p^{l_i} \rangle$.

不妨设 l_1 是 $\{l_i\}$ 中的最小元. $p^{l_1} \in I_1$，故有

$$g = p^{l_1} f_1 + \sum_{j=2}^{n} a_j f_j = p^{l_1} \left(f_1 + \sum_{j=2}^{n} a'_j f_j \right) \in N.$$

记 $e_1 = f_1 + \sum\limits_{j=2}^{n} a'_j f_j$，则 $g = p^{l_1} e_1$. 将 $(e_1, f_2, \cdots, f_n)$ 用基 $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 表示，有

$$(e_1, f_2, \cdots, f_n) = (f_1, f_2, \cdots, f_n) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a'_2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_n & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

记右侧矩阵为 $\boldsymbol{A}$，显然 $\det \boldsymbol{A} = 1 \in U$. 于是由等价条件得 $(e_1, f_2, \cdots, f_n)$ 也是 M 的一组基.

把 $M = De_1 \oplus Df_2 \oplus \cdots \oplus Df_n$ 记作 $M = De_1 \oplus M_1$，则 M_1 是秩为 $n-1$ 的自由模. 记 $N_1 = N \cap M_1$ 为 M_1 的子模，且由模的同态定理有

$$M_1/N_1 = M_1 \Big/ (N \cap M_1) \cong (M_1 + N) \Big/ N \subset M/N,$$

于是 M_1/N_1 是 p-模. 下证 $N = Dg \oplus N_1$，其中显然 $N \subset Dg \oplus N_1$.

对任意 $x \in N$，对 $b_i \in D$，记

$$x = \sum_{i=1}^{n} b_i f_i = b_1 f_1 + \sum_{i=2}^{n} b_i f_i,$$

而 $b_1 \in I_1 = \langle p^{l_1} \rangle$，于是存在 $b'_1 \in D$ 使得 $b_1 = b'_1 p^{l_1}$. 于是 $x = b'_1 p^{l_1} f_1 + \sum\limits_{i=2}^{n} b_i f_i$，则

$$x - b'_1 g \in N \cap M = N_1,$$

即对任意 $x \in N$，$x - Dg \in N_1$，所以 $x \in Dg + N_1$. 又 $Dg \cap N_1 \subset De_1 \cap M_1 = \{0\}$，于是 $N = Dg \oplus N_1$.

据归纳假设，有 M_1 的基 $\{e_2, e_3, \cdots, e_n\}$ 使 $\{p^{m_2} e_2, p^{m_3} e_3, \cdots, p^{m_n} e_n\}$ 是 N_1 的基，故有 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 使得 $\left\{p_1^{l_1} e_1, p_2^{m_2} e_2, \cdots, p_n^{m_n} e_n\right\}$ 是 N 的基. 若记 $m_1 = l_1$，即得结论. $\square$

定理 8. 设 M' 是 D 上有限生成的 p-模，则

$$M' = \bigoplus_{i=1}^{m} Dy_i, \quad \mathrm{ann} y_i = \langle p^{k_i} \rangle,$$

其中 $1 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant \cdots \leqslant k_m$. 且数 m 及数组 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 是被 M' 唯一确定的.

证明. 设 $M' = \langle x_1, x_2, \cdots, x_n \rangle$，并设 M 为 D 上的 n 秩自由模，$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ 是 M 的一组基. 则存在唯一的模同态 $\eta : M \to M'$ 满足 $\eta(f_i) = x_i$. 而 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 M' 的生成元组，于是 η 是满同态. 由模同态基本定理，$M/\ker \eta \cong M'$，于是 $M/\ker \eta$ 是 p-模.

记 $N = \ker \eta$，则 N 是 M 的子模，系数环 D 为 PID，于是 N 也是自由模. 由引理2，存在 M 的一组基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 使 $\{p^{m_1}e_1, p^{m_2}e_2, \cdots, p^{m_n}e_n\}$ 是 N 的一组基. 不妨设 $m_1 \leqslant m_2 \leqslant \cdots \leqslant m_n$，于是

$$M' \cong M/N = \bigoplus_{i=1}^{n} De_i \Big/ \bigoplus_{i=1}^{n} Dp^{m_i}e_i \cong \bigoplus_{i=1}^{n} De_i / Dp^{m_i}e_i.$$

当 $m_i = 0$ 时，$p^{m_i} = p^0 = 1$，$De_i/Dp^{m_i}e_i = \{0\}$，可以从直和中删去. 假设有 m 个非零的 m_i，则

$$0 = m_1 = m_2 = \cdots = m_{n-m} < m_{n-m+1} \leqslant m_{n-m+2} \leqslant \cdots \leqslant m_n.$$

记 $k_i = m_{n-m+i}$，$y_i' = e_{n-m+i} + Dp^{k_i}e_{n-m+i}$，则

$$\bigoplus_{i=1}^{n} De_i / Dp^{m_i}e_i = \bigoplus_{i=1}^{m} De_{n-m+i} / Dp^{k_i}e_{n-m+i} = \bigoplus_{i=1}^{m} Dy_i'.$$

$$\mathrm{ann} y_i' = \left\{ d \in D \mid dy_i' = \overline{0} \right\} = \left\{ d \in D \mid dy_i' \in Dp^{k_i}e_{n-m+i} \right\} = \langle p^{k_i} \rangle.$$

设同构映射 $M' \cong \bigoplus_{i=1}^{m} Dy_i'$ 中，y_i' 的原像为 y_i，便有

$$M' = \bigoplus_{i=1} Dy_i', \quad \mathrm{ann} y_i = \langle p^{k_i} \rangle.$$

唯一性待证. □

5 PID 上有限生成模的第一标准分解式

由前面已知主理想整环 D 上的有限生成模 M 可以分解为

$$M = \mathrm{Tor} M \oplus N,$$

其中 $\mathrm{Tor} M$ 又可以分解为若干 p-模，设

$$\mathrm{Tor} M = \bigoplus_{i=1}^{r} (\mathrm{Tor} M)_{p_i} = \bigoplus_{i=1}^{r} M_{p_i},$$

记 $\mathrm{ann}(\mathrm{Tor}M)=\langle a\rangle$，其中 $a=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_r^{n_r}$ 是标准分解式. 于是有

$$M_{p_i}=\bigoplus_{j=1}^{m_i}Dx_{ij},\quad \mathrm{ann}x_{ij}=\langle p_i^{k_{ij}}\rangle.$$

这里数 m 及数组 $1\leqslant k_{1m_i}\leqslant k_{1(m_i-1)}\leqslant\cdots\leqslant k_{i1}$ 是被 M_{p_i} 唯一确定的，于是被 M 唯一确定. 每个 M_{p_i} 表示成了 m_i 个准素循环模的直和.

记 $r(N)=m_0$,定义 D 上有限生成模 M 的秩 $r(M)=r(N)=m_0$. 设 $\{x_{01},x_{02},\cdots,x_{0m_0}\}$ 是 N 的一组基，则

$$N=\bigoplus_{j=1}^{m_0}Dx_{0j},$$

表示成了 m_0 个一秩自由模的直和. 于是

$$M=\mathrm{Tor}M\oplus N=\bigoplus_{i=1}^{r}\bigoplus_{j=1}^{m_i}Dx_{ij}\oplus\bigoplus_{j=1}^{m_0}Dx_{0j}=\bigoplus_{i=0}^{r}\bigoplus_{j=1}^{m_i}Dx_{ij}.$$

其中 $\mathrm{ann}x_{0j}=\{0\}=\langle 0\rangle$，当 $i\geqslant 1$ 时，$\mathrm{ann}x_{ij}=\langle p_i^{k_{ij}}\rangle$. 且在相伴意义下 $p_1,p_2,\cdots,p_r$ 是被 M 唯一确定的，于是 $\mathrm{ann}x_{ij}=\langle p_i^{k_{ij}}\rangle$, $i\geqslant 1$ 是被 M 唯一确定的. 以及 $m_0,m_1,\cdots,m_r$ 是被 M 唯一确定的.

将分解与分类的过程总结为下述定理.

定理 9. 设 M 是主理想整环 D 上的有限生成模，则 M 可分解为有限个循环子模的直和，即

$$M=Dx_1\oplus Dx_2\oplus\cdots\oplus Dx_n,$$

且 $\mathrm{ann}x_i=\langle 0\rangle$ 或 $\langle p_i^{k_i}\rangle$. 其中 $1\leqslant i\leqslant n$，p_i 为 D 中素元素.

当 $\mathrm{ann}x_i=\langle 0\rangle$ 时，Dx_i 为自由模. 上述分解中自由模的个数 $|\{x_i\mid \mathrm{ann}x_i=\langle 0\rangle\}|$ 是被 M 唯一确定的，称为 M 的**秩**.

当 $\mathrm{ann}x_i=\langle p_i^{k_i}\rangle$ 时，Dx_i 为循环 p_i 模. 每个 $p_i^{k_i}$ 也是被 M 唯一确定的，称为 M 的**初等因子**. 初等因子的集合 $\{p_i^{k_i}\}$ 称为 M 的**初等因子组**.

注. *1. 上述分解称为 M 的第一标准分解式.*

2. 可能有相同的初等因子，重复的要重复计.

3. 初等因子是不计次序的，因为 $a=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_r^{n_r}$ 这个乘积的因子是不计次序的.

4. $r(M)$ 和初等因子组是 M 的全系不变量，即 $r(M)$ 和初等因子组反过来可以在同构意义下确定 M.

5. PID 上的准素循环模和一秩自由模是不可分解模，反设任一 $Dx_i=A\oplus B$，则 A 和 B 仍是 PID 上有限生成模，仍然可以代入上述定理，这导致准素循环模和一秩自由模的项数增加，与项数的唯一性矛盾. 所以上述定理已经是 M 的最细的分解.

6 PID 上有限生成模的第二标准分解式

引理 3. 设 M 是 D-模，$x,y\in M$，$\mathrm{ann}x=\langle a\rangle$，$\mathrm{ann}y=\langle b\rangle$ 且 $(a,b)=1$，则

$$D(x+y)=Dx\oplus Dy,\quad \mathrm{ann}(x+y)=\langle ab\rangle.$$

证明. 对任意 $z\in D(x+y)$，存在 $d\in D$ 使得 $z=d(x+y)=dx+dy\in Dx+Dy$，于是 $D(x+y)\subset Dx+Dy$.

对 $x\in M$，由于 $(a,b)=1$，于是存在 $u,v\in D$ 使得 $ua+vb=1$.

$$x=1x=(ua+vb)x=vbx+0=vb(x+y)\in D(x+y),$$

同理 $y\in D(x+y)$，于是 $D(x+y)=Dx+Dy$.

由于 $Dx\subset M(a)$，$Dy\subset M(b)$，于是

$$Dx\cap Dy\subset M(a)\cap M(b)=M((a,b))=M(1)=\{0\},$$

于是 $D(x+y)=Dx\oplus Dy$.

由 $ab(x+y)=abx+aby=0$，有 $ab\in\mathrm{ann}(x+y)$，即 $\langle ab\rangle\subset\mathrm{ann}(x+y)$.

对任意 $c\in\mathrm{ann}(x+y)$，$c(x+y)=cx+cy=0$，而 $cx\in Dx$，$cy\in Dy$，Dx 和 Dy 是直和，于是 $cx=cy=0$. 于是 $c\in\langle a\rangle$，则 $a\mid c$，同理 $b\mid c$. 又 $(a,b)=1$，于是 $ab\mid c$，则 $c\in\langle ab\rangle$，即 $\mathrm{ann}(x+y)\subset\langle ab\rangle$，于是 $\mathrm{ann}(x+y)=\langle ab\rangle$. □

推论 2. 设 M 是 D-模，$x_1,x_2,\cdots,x_r\in M$，$\mathrm{ann}x_i=\langle a_i\rangle$，$a_1,a_2,\cdots,a_r$ 两两互素，则

$$D\left(\sum_{i=1}^r x_i\right)=\bigoplus_{i=1}^r Dx_i,\quad \mathrm{ann}\sum_{i=1}^r x_i=\langle\prod_{i=1}^r a_i\rangle.$$

证明. 对 r 作归纳法即可. □

定理 10. 设 M 是主理想整环 D 上的有限生成模，则 M 可以分解为循环子模的直和，即

$$M=\bigoplus_{j=1}^s Dz_j,$$

而且

$$\mathrm{ann}z_1\supset\mathrm{ann}z_2\supset\cdots\supset\mathrm{ann}z_s,\qquad \mathrm{ann}z_1\neq D.$$

记 $\mathrm{ann}z_j=\langle d_j\rangle$，上述集链等价于 $d_j\mid d_{j+1}$. $\{d_j\}$ 在相伴意义下由 M 唯一确定，称 d_j 为 M 的**不变因子**，$\{d_j\}$ 为 M 的**不变因子组**.

证明. 由定理9，M 可以分解为

$$M=\bigoplus_{i=1}^r\bigoplus_{j=1}^{m_i}Dx_{ij}\oplus\bigoplus_{j=1}^{m_0}Dx_{0j},$$

令 $m=\max\{m_1,m_2,\cdots,m_r\}$，对 $i=1,2,\cdots,r$，$j=m_i+1,m_i+2,\cdots,m$，令 $k_{ij}=0$，于是 $p_i^{k_{ij}}=1$. 令 $Dx_{ij}=0$，于是 $x_{ij}=0$. 则

$$\mathrm{ann}x_{ij}=D=\langle 1\rangle=\langle p_i^{k_{ij}}\rangle,$$

令

$$z_i=x_{1(m+1-i)}+x_{2(m+1-i)}+\cdots+x_{r(m+1-i)},$$

由于 $p_1,p_2,\cdots,p_r$ 两两互素，于是 $p_1^{k_{1j}},p_2^{k_{2j}},\cdots,p_r^{k_{rj}}$ 两两互素. 于是由推论2，Dz_i 是循环子模的直和仍是循环子模.

$$Dz_i=D(\bigoplus_{j=1}^{r}x_{j(m+1-i)}),$$

且可定义

$$\langle d_j\rangle=\mathrm{ann}z_j=\langle\prod_{i=1}^{r}p_i^{k_{i(m+1-j)}}\rangle.$$

于是 $d_j\mid d_{j+1}\iff\mathrm{ann}z_j\supset\mathrm{ann}z_{j+1}$. 令 $z_{m+t}=x_{0t}$，于是有 $z_s=x_{0m_0}$，这里 $s=m+m_0$. □

注. *1.* 上述分解称为 M 的第二标准分解式.

2. d_j 是讲究次序的，重复的要重复计，也可把最后那些 0 删去，称剩下的集合为不变因子组.

3. $r(M)$ 和不变因子组 $\{d_i\}$ 是 M 的全系不变量.

4. 第二标准分解是 M 的“最粗”的分解，即任意两个循环子模都不能结合成一个新的循环子模了.

5. M 的第二标准分解式的项数 $\leqslant$ 第一标准分解式的项数. 等号成立当且仅当 $r=1$ 或 $r=0$.

6. $\mathrm{ann}M=\mathrm{ann}z_1=0$ $(N\neq 0)$ 或 $\langle d_m\rangle$ $(N=0)$. 这里的 d_m 相当于高等代数里的极小多项式，其余的 d_j 都是极小多项式的倍式.

7 PID 上有限生成模的非标准分解

定义 8 (非标准分解式). 设 M 是主理想整环 D 上的有限生成模，若 M 可以分解为循环子模的直和，且不是第一标准分解式，又不是第二标准分解式，则称这个分解为 M 的**非标准分解式**.

注. 不把每列取全或不在同一行都可以取出来非标准分解式，这种非标准分解式是大量的.

已知非标准分解，可以继续分解，得到第一标准分解式，于是得到初等因子组，进而结合成不变因子组，得到第二标准分解式.

引理 4. 设 M 是 D 上扭模，$x \in M$，$\mathrm{ann}x = \langle ab \rangle$ 且 $(a,b)=1$. 则存在 $x_1, x_2 \in M$，使 $x = x_1 + x_2$，$Dx = Dx_1 \oplus Dx_2$，$\mathrm{ann}x_1 = \langle a \rangle$，$\mathrm{ann}x_2 = \langle b \rangle$.

证明. 由 $(a,b)=1$，存在 $u, v \in D$ 使得 $ua+vb=1$，于是

$$x = 1x = (ua+vb)x = uax + vbx,$$

令 $x_1 = vbx$，$x_2 = uax$，则 $a \in \mathrm{ann}x_1$，$\langle a \rangle \subset \mathrm{ann}x_1$. 对任意 $c \in \mathrm{ann}x_1$，$cx_1 = cvbx = 0$，而 $\mathrm{ann}x = \langle ab \rangle$，于是存在 $t \in D$ 使得 $cvb = tab$. 因为 $b \neq 0$，消去 b，得 $cv = ta$，于是

$$c = c(ua+vb) = cua + cvb = cua + tab = a(cu+ab) \in \langle a \rangle,$$

故 $\mathrm{ann}x_1 = \langle a \rangle$. 同理，有 $\mathrm{ann}x_2 = \langle b \rangle$. 由引理3，有 $Dx = Dx_1 \oplus Dx_2$. □

推论 3. 设 M 是 D 上扭模，$x \in M$，$\mathrm{ann}x = \langle \prod_{i=1}^{r} a_i \rangle$ 且 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 两两互素. 则存在 $x_i \in M,\ i = 1, 2, \cdots, r$ 使得 $x = \sum_{i=1}^{r} x_i$，$Dx = \bigoplus_{i=1}^{r} Dx_i$，$\mathrm{ann}x_i = \langle a_i \rangle$.

例 3. 设 M 是 $\mathbb{R}[\lambda]$-模，且 $M = \bigoplus_{i=1}^{6} \mathbb{R}[\lambda] x_i$，$\mathrm{ann}x_1 = \langle (\lambda+1)^2(\lambda^2+\lambda+1) \rangle$，$\mathrm{ann}x_2 = \langle (\lambda-1)^2(\lambda^2-\lambda-1)^3 \rangle$，$\mathrm{ann}x_3 = \langle (\lambda^2+\lambda+1)^2 \rangle$，$\mathrm{ann}x_4 = \langle (\lambda^2-1)(\lambda^2+\lambda+1) \rangle$，$\mathrm{ann}x_5 = \mathrm{ann}x_6 = \langle 0 \rangle$. 试求 M 的初等因子组和不变因子组，写出 M 的第一标准分解式和第二标准分解式.

解. $(\lambda^2-\lambda-1) = \left(\lambda - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\lambda - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$，$\lambda^2 - 1 = (\lambda+1)(\lambda-1)$.

由引理4及推论3，有 $y_1, y_2 \in M$，使 $x_1 = y_1 + y_2$，

$$\mathbb{R}[\lambda] x_1 = \mathbb{R}[\lambda] y_1 \oplus \mathbb{R}[\lambda] y_2,$$

$$\mathrm{ann}y_1 = \langle (\lambda+1)^2 \rangle,\ \mathrm{ann}y_2 = \langle (\lambda^2+\lambda+1) \rangle,$$

有 $y_3, y_4, y_5 \in M$，使 $x_2 = y_3 + y_4 + y_5$，

$$\mathbb{R}[\lambda] x_2 = \mathbb{R}[\lambda] y_3 \oplus \mathbb{R}[\lambda] y_4 \oplus \mathbb{R}[\lambda] y_5,$$

$$\mathrm{ann}y_3 = \langle (\lambda-1)^2 \rangle,\ \mathrm{ann}y_4 = \langle \left(\lambda - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 \rangle,\ \mathrm{ann}y_5 = \langle \left(\lambda - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3 \rangle,$$

记 $y_6 = x_3$，$\mathrm{ann}y_6 = \langle (\lambda^2+\lambda+1)^2 \rangle$. 有 $y_7, y_8, y_9 \in M$，使 $x_4 = y_7 + y_8 + y_9$，

$$\mathbb{R}[\lambda] x_4 = \mathbb{R}[\lambda] y_7 \oplus \mathbb{R}[\lambda] y_8 \oplus \mathbb{R}[\lambda] y_9,$$

$$\mathrm{ann}y_7 = \langle \lambda+1 \rangle,\ \mathrm{ann}y_8 = \langle \lambda-1 \rangle,\ \mathrm{ann}y_9 = \langle \lambda^2+\lambda+1 \rangle,$$

记 $y_{10} = x_5$，$y_{11} = x_6$，$\mathrm{ann}y_{10} = \mathrm{ann}y_{11} = \langle 0 \rangle$.

于是 $M = \bigoplus\limits_{j=1}^{11} \mathbb{R}\left[\lambda\right] y_j$，$\mathrm{ann}y_j$ 分别如上述. 它们或者是准素元生成的主理想，或者是 0，故此分解为 M 的第一标准分解式.

初等因子组：

$$\left\{\begin{aligned}&\lambda+1, (\lambda+1)^2, \lambda-1, (\lambda-1)^2,\\ &\lambda^2+\lambda+1, \lambda^2+\lambda+1, (\lambda^2+\lambda+1)^2, \left(\lambda-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3, \left(\lambda-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3\end{aligned}\right\}$$

不变因子组：

$$\begin{array}{llllll} d_1 = & 1 & 1 & \lambda^2+\lambda+1 & 1 & 1 \\ d_2 = & \lambda+1 & \lambda-1 & \lambda^2+\lambda+1 & 1 & 1 \\ d_3 = & (\lambda+1)^2 & (\lambda-1)^2 & (\lambda+\lambda+1)^2 & \left(\lambda-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 & \left(\lambda-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3 \end{array}$$

$$d_4 = d_5 = 0.$$

故 M 的第二分解标准式为

$$M = \bigoplus_{j=1}^{5} \mathbb{R}\left[\lambda\right] z_j, \quad \mathrm{ann}z_1 = \langle \lambda^2+\lambda+1 \rangle,$$

$$\mathrm{ann}z_2 = \langle (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1) \rangle,$$

$$\mathrm{ann}z_3 = \left\langle (\lambda+1)^2(\lambda-1)^2(\lambda^2+\lambda+1)^2 \left(\lambda-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 \left(\lambda-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3 \right\rangle,$$

$$\mathrm{ann}d_4 = \mathrm{ann}d_5 = \langle 0 \rangle.$$