模的概念

定义 1 (模)**.** 设 R 是幺环，$(M,+)$ 是 Abel 群，定义映射 $R\times M\to M,(r,m)\mapsto r\cdot m$，若对任意 $a,b\in R$，$x,y\in M$ 满足

1. $1\cdot x=x$;
2. $(a\cdot b)\cdot x=a\cdot(b\cdot x)$;
3. $(a+b)\cdot x=a\cdot x+b\cdot x$;
4. $a\cdot(x+y)=a\cdot x+a\cdot y$,

则称 M 是 R 的一个**左模**，简称**左 $\boldsymbol{R}$-模**.

注. *类似地可定义右 R-模. 若 M 既是左 R-模，又是右 R-模，且对任意 $a,b\in R$，$x\in M$ 有 $(ax)b=a(xb)$，则称 M 为* **$\boldsymbol{R}$-双模**. *对于交换幺环，左 R-模 M 是 R-双模. 在不引起歧义的前提下，把交换幺环中的 R-双模和非交换环中的左 R-模简称为 R-模. 符号“$\cdot$”称为乘法，可省略不写.*

性质 1. 对任意 $x\in M,a\in R$，有 $0x=a0=0$.

注. *这里出现的三个“0”，第一个“0”是幺环 R 中的零元，后两个“0”是 Abel 群 M 中的幺元.*

定义 2 (子模)**.** 设 M 是 R-模，$N\subset M$，若 N 是 M 的子群且对任意 $a\in R$，$x\in N$ 有 $ax\in N$，则称 N 是 M 的**子模**.

可以验证子模也是 R-模. $\{0\}$ 和 M 都是 M 的子模，称为**平凡子模**.

性质 2. M 中任意多个子模的交仍是子模.

性质 3. M 中有限多个子模的和

$$\sum_{i=1}^{n}M_i=M_1+M_2+\cdots+M_n=\left\{\sum_{i=1}^{n}x_i\mid x_i\in M_i\right\}$$

仍是子模.

定义 3 (生成的子模)**.** 设 S 是 R-模 M 的子集，M 的子模中包含 S 的最小子模，即包含 S 的子模的交，称为由 S **生成的子模**.

定义 4 (循环模). 由一个元素 x 生成的子模 Rx 称为**循环子模**. 若模 M 由 x 生成，即 $M = Rx$，则称 M 为**循环模**.

有了循环模的概念，可见循环群就是循环 $\mathbb{Z}$-模，幺环 R 就是循环 R-模.

定义 5 (商模). 设 M 是 R-模，N 是 M 的子模，则 N 是 M 的正规子群. 设 $\overline{M} = M/N$，定义映射 $R \times \overline{M} \to \overline{M}, (r, x+N) \mapsto rx + N$，则 $\overline{M}$ 为 R-模，称为 M 对 N 的**商模**.

证明. 首先证明映射是良定义的. 对 $x_1, x_2 \in M$ 且 $x_1 + N = x_2 + N$，可知 $x_1 - x_2 \in N$，于是 $ax_1 - ax_2 = a(x_1 - x_2) \in N$，故 $ax_1 + N = ax_2 + N$，于是映射是良定义的.

下面证明 $\overline{M}$ 是 R-模.

1. $1 \cdot (x+N) = 1 \cdot x + N = x + N$;
2. $(a \cdot b) \cdot (x+N) = (a \cdot b) \cdot x + N = a \cdot (b \cdot x) + N = a \cdot (b \cdot (x+N))$;
3. $(a+b) \cdot (x+N) = (a+b) \cdot x + N = a \cdot x + b \cdot x + N = a \cdot (x+N) + b \cdot (x+N)$;
4. $a \cdot (x+y+N) = a \cdot (x+y) + N = a \cdot x + a \cdot y + N = a \cdot (x+N) + a \cdot (y+N)$.

□

定义 6 (模同态). 设 R-模 M_1 与 M_2 之间存在映射 f，对任意 $x, y \in M_1$，$a \in R$，有

1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$;
2. $f(ax) = af(x)$,

则称 f 是 M_1 到 M_2 的**模同态**或 $\boldsymbol{R}$**-模同态**.

定义 7. 若 f 是 M_1 到 M_2 的模同态，且 f 是满射，则称 f 是**满同态**，称 M_1 和 M_2 是**同态的**；若 f 还是双射，则称 f 是**模同构**.

定义 8 (自然同态). 设 N 是 R-模 M 的子模，则映射 $\pi : M \to \overline{M} = M/N, x \mapsto x + N$ 是模同态，称为 M 关于 N 的**自然同态**.

定义 9 (核). 设 f 是 M_1 到 M_2 的模同态，称 $\ker f = \{x \in M_1 \mid f(x) = 0\}$ 是同态映射 f 的**核**.

定理 1 (模同态基本定理). 设 R-模 M_1 和 M_2 之间存在满同态 $f : M_1 \to M_2$，则 $M_1/\ker f \cong M_2$.

证明. 由群同态基本定理，存在同构 $\varphi : M_1/\ker f \to M_2$，下证 φ 是模同构.

$$\varphi(a(x+N)) = \varphi(ax+N) = f(ax) = af(x) = a\varphi(x+N).$$

于是 φ 是模同构. □

定义 10 (模自同态环). R-模 M 到自身的同态称为 R-自同态，简称自同态. 记 R-模 M 的自同态组成的集合为 $\mathrm{End}_R M$，则可以定义加法

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\ \forall f,g\in \mathrm{End}_R, x\in M.$$

可以验证 $\mathrm{End}_R M$ 关于加法与映射的乘法作成幺环，称为 R-模 M 的**自同态环**.

命题 1. R-模 M 的自同态环 $\mathrm{End}_R M$ 是 Abel 群 M 的自同态环 $\mathrm{End} M$ 的子环.