线性变换的标准形

设 $\mathscr{A}$ 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换，在不同的基下有不同的矩阵，由线性代数可知，这些矩阵是相似的. 现想找到一组合适的基，使得线性变换 $\mathscr{S}$ 在该基下的矩阵简单且能反映线性变换的本质.

以向量的加法为模的加法，对任意 $f(\lambda) \in F[\lambda]$，定义乘法

$$f(\lambda) \cdot x = f(\mathscr{A})(x),$$

则线性空间 V 可以看作 $F[\lambda]$-模.

命题 1. $F[\lambda]$-模 V 是 PID 上有限生成扭模.

证明. $F[\lambda]$ 是域上的多项式环，是 Euclid 环，自然是 PID. 同时，V 有一组基，与 F 相乘可以生成 V 中所有元素，于是 V 是有限生成的，基是 V 的生成元组.

设 $f(\lambda)$ 是 $\mathscr{A}$ 的特征多项式，则 $f(\mathscr{A}) = \mathscr{O}$，即零变换. 于是

$$f(\lambda) \cdot x = \mathscr{O}(x) = 0, \qquad \forall x \in V,$$

而 $f(\lambda)$ 是 n 次多项式，不为 0，于是任意 $x \in V$ 都是扭元. □

1 Frobenius 标准形

由主理想整环上有限生成模的第二标准分解式，有

$$V = \bigoplus_{i=1}^{m} F[\lambda]\, z_i, \qquad \mathrm{ann} z_i = \langle d_i \rangle,$$

其中 $d_i \mid d_{i+1}$，$i = 1, 2, \cdots m-1$.

命题 2. 记 $V_i = F[\lambda]\, z_i$，则 V_i 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

证明. 对任意 $f(\lambda)z_i, g(\lambda)z_i \in V_i$，有

$$f(\lambda)z_i + g(\lambda)z_i = (f(\lambda) + g(\lambda))(z_i) \in V_i,$$

对任意 $a \in F$，有

$$a(f(\lambda)z_i) = (af(\lambda))z_i \in V_i,$$

于是 V_i 是 V 的子空间.

对任意 $f(\lambda)z_i \in V_i$，

$$\mathscr{A}(f(\lambda)z_i) = \lambda \cdot (f(\lambda)z_i) = (\lambda f(\lambda))z_i \in V_i,$$

于是 V_i 是 V 的不变子空间. □

注. 记 $\mathscr{A}_i = \mathscr{A}\big|_{V_i}$，称为 V_i 诱导的线性变换.

现只需讨论循环模

$$V = F[\lambda]\,z,$$

因为在每一个循环模 V_i 中找到了最佳的基与相应的矩阵，就可以把这些基拼起来得到整个空间的基.

定理 1. 设 $\mathscr{A}$ 是域 F 上线性空间 V 的线性变换. 由 $\mathscr{A}$ 定义的 $F[\lambda]$-模 V 的不变因子组为 $\{d(\lambda)\}$，即

$$V = F[\lambda]\,z, \qquad \mathrm{ann} z = \langle d(\lambda)\rangle.$$

记 $\deg d(\lambda) = n$，则有

1. $\dim V = \deg d(\lambda) = n$. 且 $z, \mathscr{A}z, \mathscr{A}^2 z, \cdots, \mathscr{A}^{n-1}z$ 是 V 的一组基.

2. 记 $d(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$，则

$$\mathscr{A}(z, \mathscr{A}z, \mathscr{A}^2 z, \cdots, \mathscr{A}^{n-1}z) = (z, \mathscr{A}z, \mathscr{A}^2 z, \cdots, \mathscr{A}^{n-1}z)\begin{pmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

证明. 1. 反设 $z, \mathscr{A}z, \mathscr{A}^2 z, \cdots, \mathscr{A}^{n-1}z$ 线性相关，则有不全为零的 $b_0, b_1, \cdots, b_{n-1} \in F$ 使

$$b_0 + b_1\mathscr{A}z + \cdots + b_{n-1}\mathscr{A}^{n-1}z = 0,$$

则

$$(b_0 + b_1\lambda + \cdots + b_{n-1}\lambda^{n-1})z = 0.$$

于是 $b_0 + b_1\lambda + \cdots + b_{n-1}\lambda^{n-1} \in \mathrm{ann} z = \langle d(\lambda)\rangle$ 是 $d(\lambda)$ 的倍式，这与 $d(\lambda)$ 是 n 次的矛盾，于是 $z, \mathscr{A}z, \mathscr{A}^2 z, \cdots, \mathscr{A}^{n-1}z$ 线性无关.

又对任意 $f(\lambda)z \in V$，做带余除法，有 $f(\lambda) = q(\lambda)d(\lambda) + r(\lambda)$，其中 $\deg r(\lambda) < n$. 于是 $f(\lambda)z = q(\lambda)d(\lambda)z + r(\lambda)z = r(\lambda)z$ 可被 $z, \mathscr{A}z, \mathscr{A}^2 z, \cdots, \mathscr{A}^{n-1}z$ 线性表出. 故 $z, \mathscr{A}z, \mathscr{A}^2 z, \cdots, \mathscr{A}^{n-1}z$ 是一组基，且 $\deg d(\lambda) = \dim V$.

2. 对 $i = 0, 1, \cdots, n-2$，有

$$\mathscr{A}(\mathscr{A}^i z) = \mathscr{A}^{i+1}z = (z, \mathscr{A}z, \cdots, \mathscr{A}^{n-1}z)\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array}$$

因为 $(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0)z = d(\lambda)z = 0$，于是

$$\mathscr{A}^n z + a_{n-1}\mathscr{A}^{n-1}z + \cdots + a_1\mathscr{A}z + a_0 z = 0,$$

$$\mathscr{A}^n z = -a_0 z - a_1\mathscr{A}z - \cdots - a_{n-1}\mathscr{A}^{n-1}z,$$

于是有

$$\mathscr{A}(z, \mathscr{A}z, \mathscr{A}^2 z, \cdots, \mathscr{A}^{n-1}z) = (z, \mathscr{A}z, \mathscr{A}^2 z, \cdots, \mathscr{A}^{n-1}z)\begin{pmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

$\square$

注. 矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ 称为 $d(\lambda)$ 的**友矩阵**，与 $d(\lambda)$ 互相唯一确定.

注. 几何地，对 $\mathscr{A}$ 的循环空间 V 而言，$\mathscr{A}$ 的特征多项式就是 $\mathscr{A}$ 的极小多项式. 代数地，首一多项式的友矩阵的特征多项式就是极小多项式.

定理 2. 设 $\mathscr{A}$ 是域 F 上的线性空间 V 上的线性变换. 由 $\mathscr{A}$ 定义的 $F[\lambda]$-模

$$V = \bigoplus_{i=1}^{m} F[\lambda] z_i, \qquad \mathrm{ann} z_i = \langle d_i(\lambda) \rangle.$$

其中 $d_i(\lambda)$ 是首 1 多项式且 $d_i \mid d_{i+1}$, $i = 1, 2, \cdots, n-1$. 则

1. 在 V 中存在一组基，使得 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为准对角矩阵 $\begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_m \end{pmatrix}$，称为 $\mathscr{A}$ 的 **Frobenius 标准形**或 **(第一型) 有理标准形**，其中 B_i 是 $d_i(\lambda)$ 的友矩阵.
2. $\dim V = \sum_{i=1}^{m} \deg d_i(\lambda)$.
3. $\mathrm{ann} V = \langle d_m(\lambda) \rangle$，即 $\mathscr{A}$ 的极小多项式是最后一个不变因子.
4. $\mathscr{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda) = |\lambda \mathrm{id} - \mathscr{A}| = \prod_{i=1}^{m} d_i(\lambda)$.

5. $\mathscr{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 是 $\mathscr{A}$ 的零化多项式.

证明. 1. 由定理1,对任意 $F[\lambda]z_i$,有不变因子 $d_i(\lambda)$,线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\beta_i=\{z,\mathscr{A}z,\cdots,\mathscr{A}^{n_i-1}z\}$ 下的矩阵 B_i 为 $d_i(\lambda)$ 的友矩阵.

把每个循环子模 $F[F]z_i$ 的基 β_i 取并，即为 V 的一组基，且 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为准对角矩阵，有

$$\mathscr{A}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)\begin{pmatrix}B_1&&&\\&B_2&&\\&&\ddots&\\&&&B_m\end{pmatrix}.$$

2. 由定理1，$\dim V_i=\deg d_i(\lambda)$，于是

$$\dim V=\sum_{i=1}^m\dim V_i=\sum_1^m\deg d_i(\lambda).$$

3. $\operatorname{ann}V=\bigcap_{i=1}^m\operatorname{ann}V_i=\operatorname{ann}V_m=\langle d_m(\lambda)\rangle.$

4. $|\lambda\mathrm{id}-\mathscr{A}|=\prod_{i=1}^m|\lambda I-B_i|=\prod_{i=1}^m d_i(\lambda).$

5. 对任意 $x\in V$，

$$f(\mathscr{A})(x)=f(\lambda)\cdot x=\prod_{i=1}^{m-1}d_i(\lambda)\cdot d_m(\lambda)x=0,$$

于是 $f(\mathscr{A})=\mathscr{O}$. □

注.
1. *$\mathscr{A}$ 的极小多项式即它的 Frobenius 标准形的极小多项式，是 $B_1,B_2,\cdots,B_m$ 的极小多项式的最小公倍式 $[d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_m(\lambda)]=d_m(\lambda)$，即最后一个不变因子.*
2. *记 $m(\lambda)=d_m(\lambda)$ 是 $\mathscr{A}$ 的极小多项式，则 $\mathscr{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)=\prod_{i=1}^{m-1}d_i(\lambda)\cdot m(\lambda)$. 若不考虑根的重数，则 $m(\lambda)$ 与 $f(\lambda)$ 的根一致.*
3. *设 $\mathscr{A}$ 的某组基下的矩阵为 A, $\mathscr{A}$ 的 Frobenius 标准形为 B, 则定义矩阵 A 的 Frobenius 标准形为 B，A 的不变因子组为 $\{d_i(\lambda)\}$.*
4. *方阵 A 与它的 Frobenius 标准形相似.*
5. *域上方阵相似的充要条件是他们有相同的 Frobenius 标准形.*
6. *$\mathscr{A}$ 与它的 Frobenius 标准形互相唯一确定.*

2 Jordan 标准形与第二型有理标准形

定义 1 (代数闭域). 域上非常值的一元多项式在域中有根，则称该域是**代数闭域**.

定理 3. 设 F 是代数闭域，V 是 F 上的线性空间，$\mathscr{A}$ 是 V 上的线性变换. 则在 V 中存在一组基，使得 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} C_1 & & & \\ & C_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_t \end{pmatrix}$，称为 $\mathscr{A}$ 的 **Jordan 标准形**. 其中 $C_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & & \\ 1 & \lambda_i & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}$，称为 **Jordan 块**.

证明. 由 PID 上有限生成模的第一标准分解式，有

$$V = \bigoplus_{i=1}^{t} F[\lambda]\, z_i, \qquad \mathrm{ann} z_i = \langle p_i(\lambda)^{k_i} \rangle.$$

记 $V_i = F[\lambda]\, z_i$,可以证明 V_i 是 $\mathscr{A}$-子空间. 因为 F 是代数闭域,可以记 $\langle p_i(\lambda)^{k_i} \rangle = \langle (\lambda - \lambda_i)^{k_i} \rangle$. 可以证明，$z_i, (\mathscr{A} - \lambda_i \mathrm{id}) z_i, \cdots, (\mathscr{A} - \lambda_i \mathrm{id})^{k_i - 1} z_i$ 是 V_i 的一组基，记作 β. 且由于

$$\mathscr{A}\big|_{V_i} = \lambda_i \mathrm{id} + (\mathscr{A}\big|_{V_i} - \lambda_i \mathrm{id}),$$

$$\lambda_i \mathrm{id} \beta = \beta \begin{pmatrix} \lambda_i & & & & \\ & \lambda_i & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

$$(\mathscr{A}\big|_{V_i} - \lambda_i \mathrm{id}) \beta = \beta \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

故

$$\mathscr{A}\big|_{V_i} (z_i, \cdots, (\mathscr{A} - \lambda_i \mathrm{id})^{k_i - 1} z_i) = (z_i, \cdots, (\mathscr{A} - \lambda_i \mathrm{id})^{k_i - 1} z_i) \begin{pmatrix} \lambda_i & & & & \\ 1 & \lambda_i & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

□

注. *1. Jordan 标准形和它的初等因子组互相唯一确定. 不计次序下 Jordan 标准形和初等因子唯一确定.*

2. 设 $\mathscr{A}$ 的某组基下的矩阵为 A, $\mathscr{A}$ 的 Frobenius 标准形为 B, 则定义矩阵 A 的 Frobenius 标准形为 B，A 的不变因子组为 $\{d_i(\lambda)\}$.

命题 3. 代数闭域上方阵相似的充要条件是它们有不计次序下相同的 Jordan 标准形.

命题 4. 即使不是代数闭域，只要所有的初等因子都是一次因式的方幂，就可以在 V 中找出一组基使 $\mathscr{A}$ 在这组基下的方阵是 Jordan 标准形.

定理 4. 设 $\mathscr{A}$ 是域 F 上线性空间 V 上的线性变换，由 $\mathscr{A}$ 定义的 $F[\lambda]$-模 V 的第一标准分解式为

$$V=\bigoplus_{i=1}^{t}F[\lambda]\,z_i,\qquad \mathrm{ann}z_i=\langle p_i(\lambda)^{k_i}.$$

其中 p_i 是首 1 的不可约多项式. 则在 V 中存在一组基，使得 $\mathscr{A}$ 在这组基下的方阵为准对角矩阵 $\begin{pmatrix}B_1&&&\\&B_2&&\\&&\ddots&\\&&&B_m\end{pmatrix}$，称为 $\mathscr{A}$ 的**第二型有理标准型**. 其中 B_i 是 $p_i(\lambda)^{k_i}$ 的友矩阵.

注. *若 F 是代数闭域，则第二型有理标准形不是 Jordan 标准形. 那么，能否找到 $\mathscr{A}$ 的一种标准形，使 Jordan 标准形是这种标准形在代数闭域下的特例?*

3 三种标准形的求解

例 1. 设 V 是 $\mathbb{C}$ 上 6 维线性空间，$\mathscr{A}$ 是 V 上的线性变换. 若把 V 看成 $\mathscr{A}$ 定义的 $\mathbb{C}[\lambda]$-模时，$V=\mathbb{C}[\lambda]\,x_1\oplus\mathbb{C}[\lambda]\,x_2\oplus\mathbb{C}[\lambda]\,x_3$，且 $\mathrm{ann}x_1=\langle(\lambda+1)^2\rangle$，$\mathrm{ann}x_2=\langle\lambda^2-2\lambda+1\rangle$，$\mathrm{ann}x_3=\langle\lambda^2-1\rangle$，求 $\mathscr{A}$ 的 Frobenius 标准形、Jordan 标准形与第二型有理标准形.

解. $\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2$，$\lambda^2-1=(\lambda+1)(\lambda-1)$. 记 $y_1=x_1,y_2=x_2$，存在 $y_3,y_4\in V$ 使得 $x_3=y_3+y_4$，于是

$$\mathbb{C}[\lambda]\,x_3=\mathbb{C}[\lambda]\,y_3\oplus\mathbb{C}[\lambda]\,y_4.$$

其中 $\mathrm{ann}y_3=\langle\lambda+1\rangle$，$\mathrm{ann}y_4=\langle\lambda-1\rangle$. 于是初等因子为

$$\left\{\lambda+1,(\lambda+1)^2,\lambda-1,(\lambda-1)^2\right\}.$$

不变因子为

$$\begin{aligned} d_1 &= \quad \lambda+1 \qquad \lambda-1 \quad &= \lambda^2-1 \\ d_2 &= (\lambda+1)^2 \quad (\lambda-1)^2 \quad &= \lambda^4-2\lambda^2+1 \end{aligned}$$

于是 Frobenius 标准形为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & & 0 & & & -1 \\ & & 1 & 0 & & 0 \\ & & & 1 & 0 & 2 \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Jordan 标准形为

$$\begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & -1 & & & & \\ & 1 & -1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

第二型有理标准形为

$$\begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & 0 & -1 & & & \\ & 1 & -2 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 0 & -1 \\ & & & & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

例 2. 设 V 是 $\mathbb{Q}$ 上的 7 维线性空间，$\mathscr{A}$ 是 V 上的线性变换. 若把 V 看成 $\mathscr{A}$ 定义的 $\mathscr{Q}[\lambda]$-模时，

$$V = \bigoplus_{i=1}^{4} \mathbb{Q}[\lambda]\, x_i,$$

且 $\operatorname{ann} x_1 = \langle \lambda^3-\lambda^2-8\lambda+12 \rangle$，$\operatorname{ann} x_2 = \langle \lambda-2 \rangle$，$\operatorname{ann} x_3 = \langle \lambda^2+\lambda-6 \rangle$，$\operatorname{ann} x_4 = \langle \lambda+1 \rangle$. 求 $\mathscr{A}$ 的 Frobenius 标准形和第二型有理标准形. 若可能，也写出 $\mathscr{A}$ 的 Jordan 标准形.

解. $\lambda^3-\lambda^2-8\lambda+12 = (\lambda-2)^2(\lambda+3)$，$\lambda^2+\lambda-6 = (\lambda-2)(\lambda+3)$.

存在 $y_1, y_2 \in V$ 使 $x_1 = y_1+y_2$，其中 $\operatorname{ann} y_1 = \langle (\lambda-2)^2 \rangle$，$\operatorname{ann} y_2 = \langle \lambda+3 \rangle$.

记 $y_3 = x_2$，则 $\operatorname{ann} y_3 = \langle \lambda-2 \rangle$.

存在 $y_4, y_5 \in V$ 使得 $x = y_4+y_5$，其中 $\operatorname{ann} y_4 = \langle \lambda-2 \rangle$，$\operatorname{ann} y_5 = \langle \lambda+3 \rangle$.

记 $y_6 = x_4$，则 $\operatorname{ann} y_6 = \langle \lambda+1 \rangle$.

于是得到 V 的第一标准分解式

$$V = \bigoplus_{i=1}^{6} \mathbb{Q}\left[\lambda\right] y_i.$$

且 anny_i 如上. 于是初等因子为

$$\left\{\lambda+1, \lambda-2, \lambda-2, (\lambda-2)^2, \lambda+3, \lambda+3\right\}.$$

不变因子为

$$\begin{aligned}
d_1 &= & 1 & \quad \lambda-2 & 1 & \quad = \lambda - 2 \\
d_2 &= & 1 & \quad \lambda-2 & \lambda+3 & \quad = \lambda^2+\lambda-6 \\
d_3 &= & \lambda+1 & \quad (\lambda-2)^2 & \lambda+3 & \quad = \lambda^4-9\lambda^2+4\lambda+12
\end{aligned}$$

于是 Frobenius 标准形为

$$\begin{pmatrix}
2 & & & & & & \\
 & 0 & 6 & & & & \\
 & 1 & -1 & & & & \\
 & & & 0 & & & -12 \\
 & & & 1 & 0 & & -4 \\
 & & & & 1 & 0 & 9 \\
 & & & & & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

由于所有的初等因子都是一次因式的方幂，于是存在 Jordan 标准形如下

$$\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & 2 & & & & & \\
 & & 2 & & & & \\
 & & & 2 & & & \\
 & & & 1 & 2 & & \\
 & & & & & -3 & \\
 & & & & & & -3
\end{pmatrix}$$

第二有理标准形为

$$\begin{pmatrix}
-1 & & & & & & \\
 & 2 & & & & & \\
 & & 2 & & & & \\
 & & & 0 & -4 & & \\
 & & & 1 & 4 & & \\
 & & & & & -3 & \\
 & & & & & & -3
\end{pmatrix}$$