# 自由模

设 $R$ 是幺环，定义

$$R^{(n)} = R \times R \times \cdots \times R = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i \in R, i = 1, 2, \cdots, n\},$$

设 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^{(n)}$，记 $x$ 的第 $i$ 个分量为 $\mathrm{ent}_i x$. 对任意 $x, y \in R^{(n)}$，$a \in R$，定义

1. $\mathrm{ent}_i(x+y) = \mathrm{ent}_i x + \mathrm{ent}_i y$;

2. $\mathrm{ent}_i(ax) = a\mathrm{ent}_i x$.

可以依定义验证 $R^{(n)}$ 是一个左 $R$-模.

对 $1 \leqslant i \leqslant n$，设 $e_i \in R^{(n)}$ 满足 $\mathrm{ent}_j e_i = \delta_{ij}$. 这里 $\delta_{ij}$ 为 Kronecker 记号，即

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

则对任意 $x \in R^{(n)}$，有 $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{ent}_i x) e_i$，于是有

1. $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 生成 $R^{(n)}$，即

$$R^{(n)} = Re_1 + Re_2 + \cdots + Re_n.$$

2. 任意 $x \in R^{(n)}$，$x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ 的表示法唯一，即

$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = 0 \iff x_i = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n.$$

**定义 1** (自由模). 幺环 $R$ 上的模 $M$ 若与 $R^{(n)}$ 同构，则称为**秩 $\boldsymbol{n}$ 的自由模**.

**定义 2** (基). 设 $M$ 是 $R$-模，$u_1, u_2, \cdots, u_n \in M$，满足

1. $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 生成 $M$，即

$$M = Ru_1 + Ru_2 + \cdots + Ru_n.$$

2. 任意 $x \in M$，$x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i u_i$ 的表示法唯一，即

$$\sum_{i=1}^{n} x_i u_i = 0 \iff x_i = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n.$$

则称 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 为 $M$ 的一组**基**.

**注.** 立即可得 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 $R^{(n)}$ 的一组基.

**定义 3** (线性无关)**.** 设 $M$ 是 $R$-模，若对不全为零的 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in R$，有 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in M$ 使得 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \neq 0$，则称 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是**线性无关的**. 否则，称它们是**线性相关的**.

**定理 1.** $R$-模 $M$ 是秩 $n$ 的自由模当且仅当 $M$ 存在一组基 $u_1, u_2, \cdots, u_n$.

*证明.* 必要性：若 $M$ 是秩 $n$ 的自由模，则存在模同构 $\varphi : R^{(n)} \to M$ 满足 $u_i = \varphi(e_i)$. 于是

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i,$$

于是 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 生成 $M$.

若 $\sum_{i=1}^{n} x_i u_i = 0$，则

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(u_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = 0,$$

由于 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 $R^{(n)}$ 的一组基，于是 $\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = 0 \iff x_i = 0$. 于是 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 是 $M$ 的一组基.

充分性：若 $M$ 存在一组基 $u_1, u_2, \cdots, u_n$，设 $\eta : M \to R^{(n)}$ 满足

$$\eta\left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,$$

则对任意 $x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i, y = \sum_{i=1}^{n} y_i u_i \in M$，

$$\begin{aligned}
\eta\left(x + y\right) &= \eta\left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i + \sum_{i=1}^{n} y_i u_i\right) = \eta\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) u_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) e_i = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i + \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \\
&= \eta(x) + \eta(y).
\end{aligned}$$

对任意 $x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i \in M$，$a \in R$，有

$$a\eta(x) = a \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} a x_i e_i = \eta(ax).$$

于是 $\eta$ 是模同态.

对任意 $x=\sum_{i=1}^{n}x_iu_i, y=\sum_{i=1}^{n}y_iu_i\in M$，若 $\eta(x)=\eta(y)$，则

$$\sum_{i=1}^{n}x_ie_i=\sum_{i=1}^{n}y_ie_i,$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)e_i=0 \iff x_i-y_i=0 \iff x_i=y_i\ \forall 1\leqslant i\leqslant n.$$

于是 $x=y$，因而 $\eta$ 是单射.

对任意 $y\in R^{(n)}$，设 $y=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$，则 $x=\sum_{i=1}^{n}x_iu_i\in M$ 且 $\eta(x)=y$. 于是 $\eta$ 是满射.

综上，$\eta$ 是模同构，于是 $M\cong R^{(n)}$，即 $M$ 是秩 $n$ 的自由模. □

下述定理是自由模更一般、更抽象的刻画.

**定理 2.** 设 $R$ 是幺环，$M$ 是 $R$-模，$u_1,u_2,\cdots,u_n\in M$，则 $M$ 是秩 $n$ 的自由模且 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 是 $M$ 的一组基的充分必要条件是对任意 $R$-模 $M'$ 中的 $n$ 个元素 $v_1,v_2,\cdots,v_n$，存在唯一的模同态 $\eta:M\to M'$ 使得 $\eta(u_i)=v_i$.

*证明.* 必要性：设 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 是 $M$ 的一组基，对任意 $x=\sum_{i=1}^{n}x_iu_i\in M$，定义

$$\eta\left(\sum_{i=1}^{n}x_iu_i\right)=\sum_{i=1}^{n}x_iv_i.$$

任意 $x\in M$ 都能唯一地对应到 $M'$ 中的一个元素，于是 $\eta$ 是映射.

参考定理1的证明，可以证明 $\eta$ 是模同态.

对 $u_i=\sum_{i=1}^{n}x_iu_i\in M$，有 $x_j=\delta_{ij}$，于是 $\eta(u_i)=\sum_{i=1}^{n}x_iv_i=v_i$.

上面证明了 $\eta$ 的存在性，下证其唯一性. 设同态 $\eta':M\to M'$ 也使得 $\eta(u_i)=v_i$，则

$$\eta'\left(x_iu_i\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i\eta'(u_i)=\sum_{i=1}^{n}x_iv_i=\eta\left(\sum_{i=1}^{n}x_iu_i\right).$$

于是 $\eta'=\eta$.

充分性：设 $M'=\langle u_1,u_2,\cdots,u_n\rangle$，因而有唯一的模同态 $\eta:M\to M'$ 使得 $\eta(u_i)=u_i$. 设 $\theta:M'\to M$ 是嵌入映射，即 $\theta(x)=x,\forall x\in M'$. 则 $\eta\cdot\theta:M\to M$ 满足 $\eta\cdot\theta(u_i)=u_i$，而 $\mathrm{id}:M\to M$ 也满足 $\mathrm{id}(u_i)=u_i$. 因而由唯一性有 $\theta\cdot\eta=\mathrm{id}$. 于是 $\eta(M)=M'=M$，即 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 生成 $M$.

设同态 $\sigma : M \to R^{(n)}$ 满足 $\sigma(u_i) = e_i$，若 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i u_i = 0$，则

$$\sigma\left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sigma(u_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = 0 \iff x_i = 0,$$

于是 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 是 $M$ 的一组基，于是 $M$ 是秩 $n$ 的自由模. □

下面总假定 $R$ 是交换幺环.

**定义 4** (坐标)**.** 设 $M$ 是自由 $R$ 模，$u_1, u_2, \cdots, u_n$ 是 $M$ 的一组基. 对任意 $x \in M$，存在唯一的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 使得 $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i u_i$，称 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 $x$ 在基 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 下的**坐标**，记为

$$\mathrm{crd}(x; u_1, u_2, \cdots, u_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$x$ 可以写为

$$x = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)\mathrm{crd}(x; u_1, u_2, \cdots, u_n).$$

**定理 3.** 设 $M$ 是自由 $R$ 模，$u_1, u_2, \cdots, u_n$ 和 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 是 $M$ 的两组基，则 $m = n$.

**推论 1.** $R^{(m)} \cong R^{(n)} \iff m = n$.

**推论 2.** $R$ 上两个自由模同构当且仅当它们的秩相同.

把线性空间中的基变换与坐标变换推广，得到以下推论.

**推论 3.** 设 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 与 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 是自由 $R$ 模 $M$ 的两组基，则存在 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 使得

$$(v_1, v_2, \cdots, v_n) = (u_1, u_2, \cdots, u_n)\boldsymbol{A},$$

$$(u_1, u_2, \cdots, u_n) = (v_1, v_2, \cdots, v_n)\boldsymbol{B},$$

且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}_n$. 对任意 $x \in M$，有

$$\mathrm{crd}(x; v_1, v_2, \cdots, v_n) = \boldsymbol{B}\mathrm{crd}(x; u_1, u_2, \cdots, u_n),$$

$$\mathrm{crd}(x; u_1, u_2, \cdots, u_n) = \boldsymbol{A}\mathrm{crd}(x; v_1, v_2, \cdots, v_n).$$

$\boldsymbol{A}$ 称为从基 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 到基 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 的**过渡矩阵**，记作

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}.$$

**定义 5** (方阵环)**.** 交换幺环 $R$ 上的 $n$ 阶方阵的集合 $M_n(R)$ 关于方阵的加法和乘法作成环，称为 $R$ 上的 **$\boldsymbol{n}$ 阶方阵环**.

**定理 4.** 设 $M$ 是交换幺环 $R$ 上的自由模，则 $\mathrm{End}_R M \cong M_n(R)$.

*证明.* 由于 $M$ 是自由模,于是存在一组基 $u_1, u_2, \cdots, u_n$. 定义映射 $\varphi : \mathrm{End}_R M \to M_n(R), \eta \mapsto \boldsymbol{M}(\eta)$. 对 $\eta \in \mathrm{End}_R M$，定义

$$\eta(u_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i, \quad a_{ij} \in R.$$

定义 $\varphi(\eta) = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(R)$.

若 $\varphi(\eta_1) = \varphi(\eta_2) = \boldsymbol{A}$，则对任意 $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i u_i$，有

$$\eta_1\left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \eta_1(u_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{k=1}^{n} a_{ik} u_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \eta_2(u_i) = \eta_2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i\right),$$

于是 $\eta_1 = \eta_2$，$\varphi$ 是单射.

对任意 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in M_n(R)$，存在 $\eta$ 满足

$$\eta(u_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i,$$

则 $\varphi(\eta) = (a_{ij}) = \boldsymbol{A}$，于是 $\varphi$ 是满射.

对任意 $\eta_1, \eta_2 \in \mathrm{End}_R M$，

$$(\eta_1 + \eta_2)(u_j) = \eta_1(u_j) + \eta_2(u_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i + \sum_{i=1}^{n} b_{ij} u_i = \sum_{i=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij}) u_i,$$

于是

$$\varphi(\eta_1 + \eta_2) = (a_{ij} + b_{ij}) = (a_{ij}) + (b_{ij}) = \varphi(\eta_1) + \varphi(\eta_2).$$

$$(\eta_1\eta_2)(u_j) = \eta_1\left(\sum_{k=1}^{n} b_{kj} u_k\right) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} \eta_1(u_k) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik} u_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right) u_i,$$

于是 $\varphi(\eta_1\eta_2) = (c_{ij})$，其中 $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.

于是 $\varphi$ 是环同构，$\mathrm{End}_R M \cong M_n(R)$. □

**注.** 称 $\boldsymbol{M}(\eta)$ 为 $\eta$ 在基 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 下的矩阵.

**定理 5.** 设 $M$ 是交换幺环 $R$ 上的自由模，$u_1, u_2, \cdots, u_n$ 是 $M$ 的一组基，$\eta \in \mathrm{End}_R M$，则下列条件等价.

1. $\eta$ 是可逆映射;
2. $\eta$ 是 $M$ 的自同构;
3. $\eta(u_1), \eta(u_2), \cdots, \eta(u_n)$ 也是一组基;
4. $\boldsymbol{M}(\eta)$ 是 $M_n(R)$ 中的可逆矩阵;
5. $\det(\boldsymbol{M}(\eta))$ 是 $R$ 中可逆元素.

**性质 1.** 自由模的内直和仍是自由模，且“和的秩”=“秩的和”，“和的基”=“基的并”.