分式域

定义 1 (分式域)**.** 若整环 R 是域 F 的子环，且对任意 $a \in F$，存在 $b, c \in R$ 使得

$$a = bc^{-1},$$

则称 F 是 R 的**分式域**.

定理 1. 任意整环的分式域都存在.

证明. 令 $R^* = R \backslash \{0\}$，对集合 $R \times R^*$ 定义加法和乘法，对任意 $(a,b),(c,d) \in R \times R^*$，

$$(a,b)+(c,d)=(ad+bc,bd),$$

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac,bd).$$

容易验证 $R \times R^*$ 对上述加法和乘法作成交换幺半群，它们的幺元分别是 $(0,1)$ 和 $(1,1)$.

定义关系 $\sim$:

$$(a,b)\sim(c,d) \iff ad=bc.$$

通过反身性、对称性、传递性容易验证 $\sim$ 是等价关系. 下证 $\sim$ 对加法和都是同余关系.

对任意 $(a_1,b_1)\sim(c_1,d_1)$，$(a_2,b_2)\sim(c_2,d_2)$，有

$$a_1d_1=b_1c_1, \qquad a_2d_2=b_2c_2.$$

于是

$$(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1b_2+a_2b_1,b_1b_2),$$

$$(c_1,d_1)+(c_2,d_2)=(c_1d_2+c_2d_1,d_1d_2),$$

$$(a_1,b_1)(a_2,b_2)=(a_1a_2,b_1b_2),$$

$$(c_1,d_1)(c_2,d_2)=(c_1c_2,d_1d_2),$$

而

$$a_1b_2d_1d_2+a_2b_1d_1d_2=b_1c_1b_2d_2+b_2c_2b_1d_1=b_1b_2c_1d_2+b_1b_2c_2d_1,$$

$$a_1a_2d_1d_2=a_1d_1a_2d_2=b_1c_1b_2c_2=b_1b_2c_1c_2,$$

于是

$$((a_1,b_1)+(a_2,b_2))\sim((c_1,d_1)+(d_2,d_2)),$$

$$(a_1,b_1)(a_2,b_2)\sim(c_1,d_1)(c_2,d_2).$$

即 $\sim$ 对加法和都是同余关系.

作商集 $F = R \times R^*/\sim$，以 $\dfrac{a}{b}$ 表示 (a,b) 所在的同余类，于是可以定义 F 上的二元运算加法和乘法，这里仍以“$+$”和“$\cdot$”记，归结为代表元的运算如下.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd},$$
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

F 对加法和乘法都作成幺半群，幺元分别为 $\dfrac{0}{1}$，$\dfrac{1}{1}$.

对任意 $\dfrac{0}{d}$，由于 $0\cdot d = 0\cdot 1$，于是 $\dfrac{0}{d}=\dfrac{0}{1}$. 对任意 $\dfrac{1}{d}\in F$，有 $1\cdot d = 1\cdot d$，于是 $\dfrac{1}{1}=\dfrac{d}{d}$.

因为

$$\frac{a}{b}+\frac{-a}{b}=\frac{ab-ab}{b^2}=\frac{0}{b^2}=\frac{0}{1},$$

于是 F 对加法作成 Abel 群. 对 $F^* = F\backslash\{\dfrac{0}{1}\}$，有

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{ab}{ab}=1,$$

于是 F^* 对乘法作成 Abel 群. 又

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{f}{g}&=\frac{ad+bc}{bd}\cdot\frac{f}{g}=\frac{adf+bcf}{bdg}\\&=\frac{adgf+bcgf}{bdgg}=\frac{af}{bg}+\frac{cf}{dg}\\&=\frac{a}{b}\cdot\frac{f}{g}+\frac{c}{d}\cdot\frac{f}{g},\end{aligned}$$

于是分配律成立，故 F 是域.

由于 $\dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{1}$ 当且仅当 $a=b$ 且

$$\frac{a}{1}+\frac{b}{1}=\frac{a+b}{1},\qquad \frac{a}{1}\cdot\frac{b}{1}=\frac{ab}{1},$$

故可将 R 作为 F 的子环，且对任意 $\dfrac{a}{b}\in F$，有

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{1}\cdot\frac{1}{b}=\frac{a}{1}\cdot\left(\frac{b}{1}\right)^{-1}.$$

于是 F 是 R 的分式域. □

定理 2. 整环 R 的分式域 F 是以 R 为子环的最小域，因而 R 的分式域唯一.

证明. 设 F' 是域且以 R 为子环，则可依子环的充要条件验证 F' 中子集

$$F_1=\{ab^{-1}\mid a,b\in R, b\neq 0\}$$

是 F' 的子域. 又 $\dfrac{a}{b}\to ab^{-1}$ 是 F 到 F_1 的同构，于是 $F\subset F'$. □

注. 上述关于分式域存在唯一性的定理环 R 可以没有幺元，即无零因子交换环.

注. 若 R 没有交换性，那么 R 一般来说不能扩充为一个体.

命题 1. 域的分式域是其本身.