有限生成 Abel 群

任何一个 Abel 群可以看作一个 $\mathbb{Z}$-模.

定理 1. 设 G 是有限生成的 Abel 群，运算为加法，则存在整数 $n \geqslant 0$ 及整数组 $d_1, d_2, \cdots, d_k$ 满足

1. $G \cong \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \mathbb{Z}_{d_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{d_k} \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{n}$.

2. $d_i \mid d_{i+1},\ 1 \leqslant i \leqslant k-1$.

3. n 与 $\{d_i\}$ 被 G 唯一确定.

证明. 把 G 看作主理想整环 $\mathbb{Z}$ 上的有限生成模，由 PID 上有限生成模的第二标准分解式，有

$$G = \bigoplus_{i=1}^{k} Dy_i \oplus \bigoplus_{i=1}^{k+n} Dy_i,$$

$$\mathrm{ann} y_i = \langle d_i \rangle,\ d_i \mid d_{i+1}, i = 1, 2, \cdots, k,$$

$$\mathrm{ann} y_i = \langle 0 \rangle,\ i = k+1, k+2, \cdots, n.$$

由 $Dy_i \cong \mathbb{Z}_{d_i}$，有

$$\bigoplus_{i=1}^{k} Dy_i \cong \bigoplus_{i=1}^{k} D_{d_i}.$$

$$\bigoplus_{i=k+1}^{k+n} Dy_i \cong \bigoplus_{i=k+1}^{k+n} \mathbb{Z}.$$

于是

$$G \cong \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \mathbb{Z}_{d_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{d_k} \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{n}.$$

□

注. $\bigoplus_{i=1}^{k} Dy_i$ 中的元素个数为 $\prod_{i=1}^{k} d_i$，而 $i = k+1, \cdots, k+n$ 时，Dy_i 中元素个数与 $\mathbb{Z}$ 中元素个数相同，有可数多个. 于是若 G 是有限群，那么分解一定不会有自由模部分，且 $|G| = \prod_{i=1}^{k} d_i$.

定义 1 (Betti 数与扭系数). 上述分解中，$r(G) = n$ 是分解的自由模的秩，称为 G 的 **Betti 数**. 不变因子 $d_1, d_2, \cdots, d_k$ 称为 G 的**扭系数**.

定理 2. 设 G 为有限生成的 Abel 群，则

$$G \cong \bigoplus_{i,j} \mathbb{Z}_{p_i^{k_{ij}}} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}.$$

其中 p_i 为互不相伴的素数，且 n 与 $\{p_i^{k_{ij}}\}$ 被 G 唯一确定.

证明. 由 PID 上有限生成模的第一标准分解式即得. □

由于 n 和不变因子、初等因子是 PID 上有限生成模的全系不变量，于是有

定理 3. 有限生成 Abel 群 $G \cong G_1$ 当且仅当它们的 Betti 数与扭系数相同或它们的 Betti 数与初等因子相同.

例 1. 讨论 24 阶 Abel 群 G 的结构.

解.

$$24 = 2^3 \times 3 = 2 \times 2^2 \times 3 = 2 \times 2 \times 2 \times 3,$$

于是 G 的结构有三种，它们是

$$G \cong \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_3;$$

$$G \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3;$$

$$G \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3.$$

例 2. Abel 群的 Betti 数为 2，扭系数为 $3, 36$，求 G 的“最细”的分解.

解.

$$36 = 3^2 \times 2^2 = 3 \times 3 \times 2^2 = 3^2 \times 2 \times 2 = 3 \times 3 \times 2 \times 2.$$

仅有 $36 = 3^2 \times 2^2$ 是满足题意的分解，得

$$\begin{array}{ccc} d_1 & 3 & 1 \\ d_2 & 3^2 & 2^2 \end{array}$$

即初等因子组为 $\{3, 3^2, 2^2\}$. 于是

$$G \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

命题 1. 设 $\gamma(n)$ 为互不同构的 n 阶 Abel 群的个数，$\rho(m)$ 表示正整数 m 的分拆数，即写成正整数之和的种数（交换的算一种），则对任意素数 p，有

$$\gamma(p^m) = \rho(m).$$

命题 2. 对任意正整数 a，设 $a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r}$，则有

$$\gamma(a) = \prod_{i=1}^{r} \gamma(p_i^{n_i}) = \prod_{i=1}^{r} \rho(n_i).$$