

模的直和

定义 1 (外直和). 设 $M_1, M_2, \dots, M_n$ 是 R -模, $M = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in M_i, 1 \leq i \leq n\}$. 若满足

1. $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$;
2. $a(x_1, x_2, \dots, x_n) = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$,

则可验证 M 也是 R -模, 称为 $M_1, M_2, \dots, M_n$ 的**外直和**, 记作

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n = \bigoplus_{i=1}^n M_i.$$

注. M_i 大多数情况下不是 M 的子模, 甚至不是子集, 因为它们的元素都不一样.

令 $M'_i = \left\{ x'_i = (0, 0, \dots, \underset{\text{第 } i \text{ 个}}{x_i}, \dots, 0) \mid x_i \in M_i, 1 \leq i \leq n \right\}$, 这样 M'_i 是 M 的子模, 且在 M_i 与 M'_i 中存在同构映射.

定理 1. 设 $M_1, M_2, \dots, M_n$ 与 N 都是 R -模, $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$, φ_i 是 M_i 到 N 的模同态, 则存在唯一的模同态 $\varphi: M \rightarrow N$ 使得

$$\varphi(x'_i) = \varphi_i(x_i).$$

证明. 存在性: 定义

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x_i),$$

根据模同态的定义验证即可.

唯一性: 设 $\psi: M \rightarrow N$ 也是模同态满足 $\psi(x'_i) = \varphi_i(x_i)$, 则

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \psi\left(\sum_{i=1}^n x'_i\right) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x_i) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

于是 $\psi = \varphi$. □

定义 2 (内直和). 若 R -模 N 的子模 $M_1, M_2, \dots, M_n$ 满足

1. $N = M_1 + M_2 + \dots + M_n$;
2. $M_i \cap \left(\sum_{j \neq i} M_j\right) = \{0\}, \quad 1 \leq i \leq n,$

则称 N 是 $M_1, M_2, \dots, M_n$ 的内直和, 也记作

$$N = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n = \bigoplus_{i=1}^n M_i.$$

注. 条件 2 比“ $M_i \cap M_j = \{0\}, \forall i \neq j$ ”的条件更强, 也等价于 N 中元素表示为 $M_1, M_2, \dots, M_n$ 中元素之和的表法唯一.

定理 2. 设 M 是 R -模 $M_1, M_2, \dots, M_n$ 的外直和, N 是 $M_1, M_2, \dots, M_n$ 的内直和, 则

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$$

是 M 到 N 的模同构映射.

证明. 根据定义可以验证 φ 是模同态. 下证 φ 是双射.

由于 N 是 $M_1, M_2, \dots, M_n$ 的内直和, 于是 $N = M_1 + M_2 + \dots + M_n$, 对任意 $y \in N$, 都存在 $x_i \in M_i$ 使得 $y = \sum_{i=1}^n x_i$, 于是 y 有原像 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 故 φ 是满射.

若 $\sum_{i=1}^n x_i = 0$, 则

$$x_i = -\sum_{j \neq i} x_j \in M_i \cap \left(\sum_{j \neq i} M_j \right) = \{0\},$$

于是 $x_i = 0$ ($1 \leq i \leq n$), 于是 $\ker \varphi = (0, 0, \dots, 0)$, 故 φ 是单射. □

性质 1. 直和的表法是唯一的.

证明. 对任意 $a \in N$, 假设有两种表法

$$a = x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n,$$

则

$$a - a = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) + \dots + (x_n - y_n) = 0,$$

于是

$$(x_i - y_i) = -\sum_{j \neq i} (x_j - y_j) \in M_i \cap \left(\sum_{j \neq i} M_j \right) = \{0\},$$

于是 $x_i - y_i = 0$ ($1 \leq i \leq n$), 故 $x_i = y_i$. □

性质 2. 直和的直和仍是直和.

性质 3. 直和可以任意结合 (任意加括号).

定义 3 (无关). 若 R -模 M 的子模 $M_1, M_2, \dots, M_n$ 满足

$$M_i \cap \left(\sum_{j \neq i} M_j \right) = \{0\}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

则称 $M_1, M_2, \dots, M_n$ 是无关的.

定义 4 (不可分解模). 若 R -模 M 不能表示为两个非零模的直和, 则称 M 为不可分解模. 否则称 M 为可分解模.

命题 1. 设 M 是 R -模. 若 $M = M_1 \oplus M_2$, 则 $M_1 \cong M/M_2$ 且 $M_2 \cong M/M_1$.

证明. 由直和的对称性, 只证明 $M_1 \cong M/M_2$ 即可.

设 $f: M \rightarrow M_1$, 对任意 $x \in M$, x 可以唯一分解为 $x_1 + x_2$, 这里 $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$. 对 $x = x_1 + x_2 \in M$, 令 $f(x) = x_1$, 则 f 是映射. 对任意 $x_1 \in M_1$, 都有任意 $x_2 \in M_2$ 使得 $x_1 + x_2 \in M$, 于是 x_1 总有原像, f 是满射. 当 $x_1 = 0$ 时, $x = 0 + x_2 = x_2 \in M_2$, 于是 $\ker f = M_2$.

对任意 $x, y \in M$, 有唯一分解 $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, 于是

$$f(x + y) = x_1 + y_1 = f(x_1) + f(y_1),$$

对任意 $a \in R$, 有

$$f(ax) = f(ax_1 + ax_2) = ax_1 = af(x),$$

于是 f 是满同态. 由同态基本定理, $M_1 \cong M/\ker f = M/M_2$. □

命题 2. 设 R -模 M 有直和分解 $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$. 对 $1 \leq i \leq n$, 设 N_i 是 M_i 的子模, 记

$$N = \sum_{i=1}^n N_i. \text{ 则}$$

$$N = \bigoplus_{i=1}^n N_i, \quad M/N \cong \bigoplus_{i=1}^n (M_i/N_i).$$

证明. 由于 $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$, 于是对任意 i , 有 $M_i \cap \left(\sum_{j \neq i} M_j \right) = \{0\}$. 而 N_i 是 M_i 的子模, 有

$N_i \subset M_i$ 及 $\sum_{j \neq i} N_j \subset \sum_{j \neq i} M_j$, 于是 $N_i \cap \left(\sum_{j \neq i} N_j \right) = \{0\}$. 又 $N = \sum_{i=1}^n N_i$, 故

$$N = \bigoplus_{i=1}^n N_i.$$

定义映射 $\varphi: M \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n (M_i/N_i)$, $x \mapsto (x_1 + N_1, x_2 + N_2, \dots, x_n + N_n)$, 其中 $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ 是唯一分解, $x_i \in M_i$, 于是 φ 是良定义的.

对任意 $x, y \in M$, $a \in R$,

$$\varphi(x + y) = (\overline{x_1 + y_1}, \dots, \overline{x_n + y_n}) = (\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}) + (\overline{y_1}, \dots, \overline{y_n}) = \varphi(x) + \varphi(y),$$

$$\varphi(ax) = (\overline{ax_1}, \overline{ax_2}, \dots, \overline{ax_n}) = a(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}) = a\varphi(x),$$

于是 φ 是模同态.

对任意 $(x_1 + N_1, x_2 + N_2, \dots, x_n + N_n) \in \bigoplus_{i=1}^n (x_i / N_i)$, 存在原像 $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n \in M$,

于是 φ 是满同态. 又

$$\ker \varphi = \{x \in M \mid \varphi(x) = 0 + N\} = \{x \in M \mid x_i \in N_i\} = \bigoplus_{i=1}^n N_i = N,$$

由模同态基本定理,

$$M/N \cong \bigoplus_{i=1}^n (M_i / N_i).$$

□